

# Mécanique générale

## Dynamique : théorie classique du choc

par **Jean-Pierre BROSSARD**

Professeur de mécanique à l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon

<b>1. Éléments généraux de la théorie du choc</b> .....	A 1 668 - 3
1.1 Impulsion d'une force. Percussion.....	— 3
1.2 Forme impulsive de la loi fondamentale.....	— 3
1.3 Définition d'un phénomène de choc.....	— 3
1.3.1 Caractéristiques d'un phénomène de choc.....	— 3
1.3.2 Résultats complémentaires.....	— 4
1.4 Théorèmes généraux à caractère vectoriel.....	— 4
1.4.1 Théorème de la somme géométrique.....	— 5
1.4.2 Théorème du moment cinétique.....	— 5
1.5 Choix des repères en théorie du choc.....	— 5
1.6 Un modèle capital en théorie du choc : le choc de deux sphères.....	— 5
1.6.1 Définition du choc direct.....	— 5
1.6.2 Application des théorèmes généraux.....	— 5
1.6.3 Indétermination du problème.....	— 6
1.6.4 Analyse du phénomène de choc.....	— 6
1.6.5 Levée de l'indétermination. Coefficient de restitution.....	— 6
1.7 Théorie de Hertz.....	— 7
1.8 Théorème de l'énergie cinétique.....	— 8
<b>2. Choc sans frottement entre solides</b> .....	— 8
2.1 Analyse générale du choc.....	— 8
2.1.1 Effet d'une percussion sur un solide libre.....	— 8
2.1.2 Indétermination du problème de choc de deux solides.....	— 9
2.1.3 Étude du contact entre deux solides au cours d'un choc.....	— 9
2.2 Méthode d'étude d'un problème comportant un choc.....	— 10
2.2.1 Les trois phases de l'étude.....	— 10
2.2.2 Étude de la traction par choc en supposant le choc mou.....	— 11
<b>3. Choc avec frottement entre solides</b> .....	— 12
3.1 Cas d'une plaque mobile (S) heurtant une plaque fixe (S <sub>0</sub> ).....	— 12
3.1.1 Théorèmes généraux de la théorie du choc.....	— 12
3.1.2 Application des théorèmes généraux.....	— 12
3.1.3 Relation entre les composantes de la force et les dérivées de la vitesse $\vec{v}_S^0(I)$ .....	— 13
3.1.4 Discussion.....	— 13
3.2 Méthode générale.....	— 16
3.2.1 Théorèmes généraux du choc appliqués à (S) et (S').....	— 17
3.2.2 Lois concernant les actions mécaniques.....	— 17
3.2.3 Théorèmes généraux de la dynamique des forces finies.....	— 18
3.2.4 Expression de $\vec{v}_{S'}^S(I)$ .....	— 18
3.2.5 Relation entre la vitesse de glissement et les composantes de $\vec{F}_{SS'}$ .....	— 19
3.2.6 Discussion du problème de choc.....	— 19

**D**ans de nombreux cas pratiques, les actions mécaniques mises en jeu agissent pendant un temps très court tout en ayant une grande amplitude. Soit une action  $\vec{F}$ . Ses composantes  $X, Y, Z$  ont alors l'allure de la figure ci-dessous.

Du point de vue de la loi fondamentale de la mécanique, il n'y a pas de changement de nature. Par contre, en pratique, la différence est fondamentale : du point de vue physique, il est très difficile de mesurer effectivement ces actions mécaniques.

Aussi, dans certains cas, a-t-on été conduit à une formulation qui, pour l'étude des mouvements, permet de se passer de la connaissance effective de ces actions. **C'est la théorie classique du choc.**

Nous verrons, par ailleurs, qu'il y a une conséquence mathématique importante. Il y aura, au cours de cette phase  $[t_1, t_2]$ , une brusque variation des vitesses que nous traiterons mathématiquement comme des discontinuités. Pour trouver le mouvement à l'issue de cette phase, nous aurons à résoudre des systèmes de Cramer où les inconnues seront les variations de vitesse au lieu d'avoir à trouver la solution d'équations différentielles du second ordre, ce qui explique le fait historique que la théorie du choc ait été développée très tôt.

De nos jours, il y a un renouveau d'intérêt pour la théorie du choc du fait de l'accroissement des vitesses des moyens de locomotion et des brusques variations qui peuvent survenir.

C'est une théorie importante dans toutes les questions de sécurité et dans les jeux de balle.

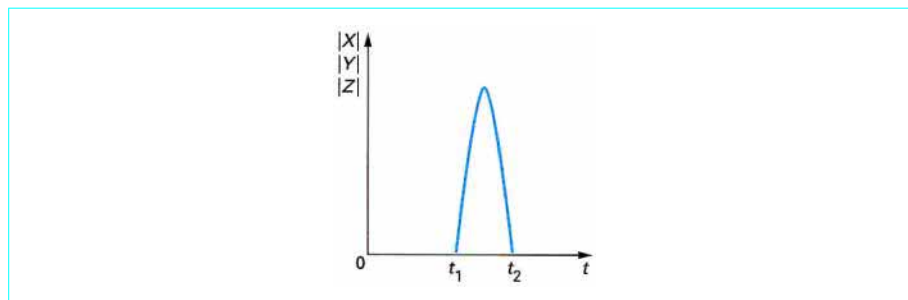


Figure A – Force grande pendant un temps court

Pour une meilleure compréhension du texte, le lecteur devra se reporter aux formulations établies dans les articles précédents de mécanique générale parus dans ce traité :

- [A 1 660] Méthode de l'étude ;
- [A 1 661] Cinématique générale ;
- [A 1 663] Développement de la cinématique ;
- [A 1 664] Dynamique générale. Forme vectorielle ;
- [A 1 666] Dynamique générale. Forme analytique ;
- [A 1 667] Dynamique : Étude des états.

Les notations utilisées dans cet article sont, par conséquent, celles qui y sont définies, et les relations établies précédemment sont considérées comme acquises et reprises sans nouvelle démonstration.

# 1. Éléments généraux de la théorie du choc

## 1.1 Impulsion d'une force. Percussion

Dans ce paragraphe, nous allons définir les concepts et les outils de la théorie du choc.

### ■ Impulsion élémentaire d'une force

Soit une force  $\vec{F}$  agissant sur un système quelconque.

On appelle **impulsion élémentaire** du vecteur  $\vec{F}$  le vecteur  $d\vec{I} = \vec{F} dt$ .

### ■ Impulsion intégrée

On appelle **impulsion intégrée** au vecteur  $\vec{F}$  pendant l'intervalle de temps  $[t_2, t_1]$  l'intégrale vectorielle  $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$ .

Cela signifie que les composantes de  $\vec{I}$  sont les intégrales des composantes de  $\vec{F}$ .

### ■ Dimension de l'impulsion

La dimension de l'impulsion est  $MLT^{-2}T = MLT^{-1}$ ; c'est le produit d'une force par un temps.

En mécanique, une autre notion se présente sous une forme, comparable : c'est le travail  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{P}$ . C'est un scalaire. Il a la dimension  $ML^2 T^{-2}$ .

Le travail peut être nul sans que l'impulsion le soit.

### Exemple

Supposons  $\vec{F}$  orthogonal à  $\vec{v}$  :

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = 0 \Rightarrow \vec{W} = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \neq 0 \Rightarrow \vec{I} \neq 0$$

**Remarque :** le travail est un scalaire alors que l'impulsion est un vecteur.

### ■ Percussion

L'impulsion a une signification bien précise. Reprenons notre figure de la force très grande qui agit pendant un temps très court (figure 1).

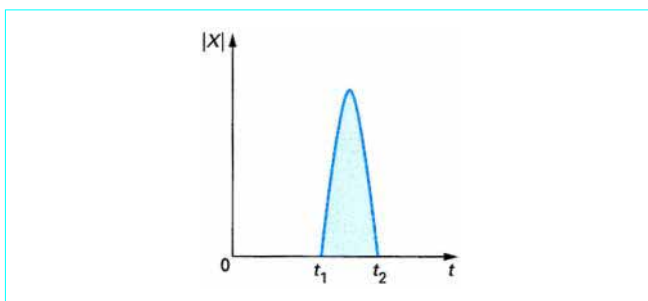


Figure 1 – Percussion

Nous avons, par exemple, pour les composantes de  $\vec{I}$  :

$$I_X = \int_{t_1}^{t_2} X dt$$

Si  $|X|$  devient **grand** pendant un **temps court** et si l'intégrale  $I_X$  demeure **finie**, on dit que l'on a affaire à **une percussion au lieu de l'impulsion  $\vec{I}$** .

On notera :

$$\widehat{\vec{F}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

$$\widehat{X} = \int_{t_1}^{t_2} X dt; \widehat{Y} = \int_{t_1}^{t_2} Y dt; \widehat{Z} = \int_{t_1}^{t_2} Z dt$$

En physique, cette idée a été exploitée par Dirac. En mathématiques, cela a donné lieu à la théorie des distributions de L. Schwartz.

## 1.2 Forme impulsive de la loi fondamentale

Soit  $\vec{F}$  la force agissant sur un point P de masse  $m$ . La loi fondamentale s'écrit (article [A 1 664]) :

$$\vec{F} = \overrightarrow{J^g}(P)m$$

Multiplions par  $dt$  les deux membres de cette équation :

$$\vec{F} dt = m d\overrightarrow{v^g}(P)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m \left\{ \left[ \overrightarrow{v^g}(P) \right]_2 - \left[ \overrightarrow{v^g}(P) \right]_1 \right\}$$

On notera la différence de vitesse par  $\Delta\overrightarrow{v^g}(P)$ .

D'où

$$\vec{I} = m \Delta\overrightarrow{v^g}(P)$$

**Théorème.** La variation de la quantité de mouvement d'un point matériel pendant un intervalle de temps quelconque est égale à l'impulsion relative à cet intervalle.

## 1.3 Définition d'un phénomène de choc

Supposons une force  $\vec{F}$  agissant sur un point matériel de masse  $dm$  :

$$\vec{F} = \overrightarrow{J^g}(P) dm$$

Si  $\vec{F}$  devient très grand pendant un temps très court, il en sera de même pour  $\overrightarrow{J^g}(P)$ . Il y aura une variation très rapide de  $\overrightarrow{v^g}(P)$ . Précisons ce phénomène.

### 1.3.1 Caractéristiques d'un phénomène de choc

#### ■ Brusque variation de vitesse

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m \left\{ \left[ \overrightarrow{v^g}(P) \right]_2 - \left[ \overrightarrow{v^g}(P) \right]_1 \right\}$$

$$\widehat{\vec{F}} = m \Delta\overrightarrow{v^g}(P)$$

Le théorème de la moyenne permet d'écrire :

$$\vec{F}_{\text{moy}} \times (t_2 - t_1) = m \Delta \vec{v}^g(P)$$

Supposons que  $\vec{F}$  (son module) devienne grand de manière que  $\vec{F}_{\text{moy}}$  devienne de l'ordre de  $1/(t_2 - t_1)$ , c'est-à-dire que ce vecteur soit de la forme :

$$\vec{F}_{\text{moy}} = \frac{\widehat{\vec{F}}}{t_2 - t_1}, \widehat{\vec{F}} \text{ vecteur non nul}$$

on a donc :

$$\widehat{\vec{F}} = m \Delta \vec{v}^g(P)$$

La différence de vitesse est donc un vecteur fini. Il y a brusque variation de vitesse, ce qui nous conduit à la traiter comme une discontinuité.

**Exemple** : balle de golf frappée par un driver (figure 2).

La composante horizontale de la vitesse de la balle au départ peut atteindre 75 m/s et la force de contact 15 000 N.

On a donc :  $X_{\text{moy}} = 0,042 \times \frac{75}{4 \cdot 10^{-4}} = 7,8\text{N}$

La force moyenne est très faible alors que la force maximale est très grande.

Cet exemple simple montre clairement que la notion de force est inadéquate en théorie du choc. C'est pourquoi, on utilise la notion de percussion.

■ **Pas de changement appréciable de position**

Dans l'intervalle  $[t_1, t_2]$  le vecteur  $\vec{v}^g(P)$  reste naturellement un vecteur compris entre les vecteurs  $\left[ \vec{v}^g(P) \right]_2$  et  $\left[ \vec{v}^g(P) \right]_1$ .

Le déplacement élémentaire du point P est  $d\vec{P} = \vec{v}^g(P) dt$ , d'où :

$$\vec{P}_1\vec{P}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}^g(P) dt ; \vec{P}_1\vec{P}_2 = (t_2 - t_1) \vec{v}_{\text{moy}}$$

$\vec{v}_{\text{moy}}$  est un vecteur compris entre  $\left[ \vec{v}^g(P) \right]_2$  et  $\left[ \vec{v}^g(P) \right]_1$ . C'est donc un vecteur fini (figure 3).

Par suite, si  $(t_2 - t_1)$  est petit, il en est de même de  $\vec{P}_1\vec{P}_2$ .

Nous avons analysé ce qui se passe au cours du phénomène. On peut donc prendre comme critère de choc le résultat limite.

Lorsqu'il y a discontinuité de vitesse sans variation de position, on dit que le point a subi un choc ou une percussion caractérisée par le vecteur :

$$\widehat{\vec{F}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

Dans le cas du choc, on emploie le terme de percussion à la place de celui d'impulsion.

**1.3.2 Résultats complémentaires**

■ **Percussion d'une force finie**

Une force qui n'est pas instantanée, c'est-à-dire qui reste finie pendant l'intervalle  $[t_1, t_2]$ , donne une percussion :

$$\widehat{\vec{F}} = \vec{F}_{\text{moy}} (t_2 - t_1)$$

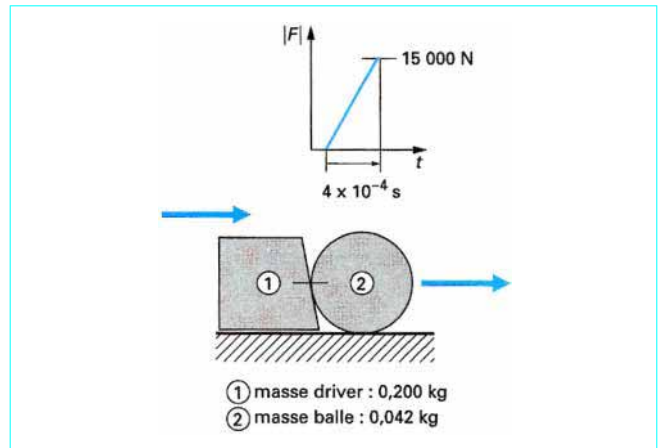


Figure 2 - Choc driver-balle de golf

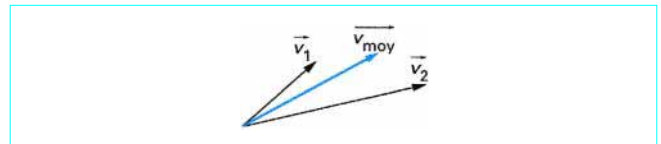


Figure 3 - Vecteur vitesse moyenne

Mais comme  $\vec{F}_{\text{moy}}$  est fini, la percussion est infiniment petite avec  $(t_2 - t_1)$ . Elle peut être négligée devant les percussions finies.

■ **Percussion de liaison**

On admettra que les lois du frottement sont les mêmes pour les forces de percussion que pour les forces finies.

■ **Percussions extérieures. Percussions intérieures**

On considère que le postulat de l'action et de la réaction est vrai également pour les percussions.

Comme pour les forces, on peut énoncer le théorème : les percussions intérieures forment un torseur nul.

**1.4 Théorèmes généraux à caractère vectoriel**

Supposons un système soumis à un ensemble d'actions extérieures  $\vec{F}_k$ . Le torseur des actions extérieures a pour éléments de réduction :

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_{\text{ex}} &= \sum_{k=1}^n \vec{F}_k ; \vec{M}_{\text{ex}}(C) = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{CP}_k \wedge \vec{F}_k \\ \widehat{\vec{F}}_k &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k dt ; \widehat{\vec{M}}_k(C) = \overrightarrow{CP}_k \wedge \widehat{\vec{F}}_k \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{C appartenant} \\ \text{au système} \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \widehat{\vec{F}}_k &= \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \right) dt \\ \sum_{k=1}^n \widehat{\vec{F}}_k &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{ex}} dt ; \sum_{k=1}^n \widehat{\vec{F}}_k = \widehat{\vec{F}}_{\text{ex}} \end{aligned}$$

La somme des percussions est égale à la percussion de la somme.

$$\text{De même : } \sum_{k=1}^n \overrightarrow{CP_k} \wedge \widehat{F_k} = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{CP_k} \wedge \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F_k} dt$$

Pendant le choc, C et P<sub>k</sub> demeurent fixes par hypothèse de la théorie du choc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \overrightarrow{CP_k} \wedge \widehat{F_k} &= \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{CP_k} \wedge \overrightarrow{F_k} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^n \overrightarrow{CP_k} \wedge \overrightarrow{F_k} dt \\ \sum_{k=1}^n \overrightarrow{CP_k} \wedge \widehat{F_k} &= \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{M_{ex}}(C) dt \\ \sum_{k=1}^n \overrightarrow{CP_k} \wedge \widehat{F_k} &= \widehat{M_{ex}}(C) \end{aligned}$$

La somme des moments de percussions est égale à la percussion du moment.

### 1.4.1 Théorème de la somme géométrique

Partons du résultat obtenu dans l'article [A 1 664] *Dynamique générale. Forme vectorielle*, de ce traité.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{ex}} &= \frac{d^g}{dt} \overrightarrow{\sigma^g} ; \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F_{ex}} dt = \left[ \overrightarrow{\sigma^g} \right]_2 - \left[ \overrightarrow{\sigma^g} \right]_1 \\ \widehat{F_{ex}} &= \left[ \overrightarrow{\sigma^g} \right]_2 - \left[ \overrightarrow{\sigma^g} \right]_1 \end{aligned}$$

**Théorème.** La somme géométrique des percussions extérieures est égale à la variation de la quantité de mouvement.

### 1.4.2 Théorème du moment cinétique

Prenons comme origine des moments C fixe.

Le théorème du moment cinétique indique :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{ex}}(C) &= \frac{d^g \mu^g(C)}{dt} \\ \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{M_{ex}}(C) dt &= \left[ \overrightarrow{\mu^g}(C) \right]_2 - \left[ \overrightarrow{\mu^g}(C) \right]_1 \\ \widehat{M_{ex}}(C) &= \left[ \overrightarrow{\mu^g}(C) \right]_2 - \left[ \overrightarrow{\mu^g}(C) \right]_1 \\ \sum_{k=1}^n \overrightarrow{CP_k} \wedge \widehat{F_k} &= \left[ \overrightarrow{\mu^g}(C) \right]_2 - \left[ \overrightarrow{\mu^g}(C) \right]_1 \end{aligned}$$

**Théorème.** Le moment de la percussion en un point fixe est égal à la variation du moment cinétique.

**Remarque :** nous avons le même résultat si nous appliquons le théorème au centre d'inertie du système ou en un point qui ne subit pas de discontinuité de vitesse.

## 1.5 Choix des repères en théorie du choc

Le choix des repères n'est pas aussi strict que celui qui doit être fait en dynamique usuelle. On peut démontrer le théorème suivant.

**Théorème.** Il existe une infinité de repères où l'on peut appliquer la loi fondamentale concernant le choc. Ils sont tous en mouvement continu par rapport à un repère galiléen.

## 1.6 Un modèle capital en théorie du choc : le choc de deux sphères

Ce modèle a joué un rôle considérable en théorie du choc et même, plus généralement, en mécanique. Il nous permet de comprendre les problèmes qui se posent. Mieux, il nous permet de préciser notre propos initial à savoir que la théorie du choc est une théorie destinée à pallier notre ignorance des actions mécaniques. En effet, dans ce cas, nous pouvons étudier le phénomène de choc comme un mouvement ordinaire car la théorie de Hertz nous permet de connaître la nature des actions au contact de deux sphères.

### 1.6.1 Définition du choc direct

Soit deux sphères homogènes (S) et (S') de masses *m* et *m'*, qui viennent se heurter à l'instant *t*<sub>1</sub>. Le choc est appelé **direct** quand, à cet instant *t*<sub>1</sub>, leur vecteur rotation est nul et que les vitesses de leurs centres G et G' sont dirigées suivant la ligne des centres (figure 4).

Pendant la durée du choc, la ligne GG' peut être considérée comme immobile. Nous la prendrons comme axe (O ; X<sub>0</sub>).

Posons  $\left( \overrightarrow{v_S^0} \right)_1 = v_1 \overrightarrow{X_0}$  ;  $\left( \overrightarrow{v_{S'}^0} \right)_1 = v'_1 \overrightarrow{X_0}$  à l'instant initial.

Nous supposons que les liaisons sont parfaites.

### 1.6.2 Application des théorèmes généraux

#### ■ Théorème du moment cinétique à chaque sphère en G

• à (S) :  $\overrightarrow{M_{ex}}(G) = \left[ \overrightarrow{\mu^0}(G) \right]_2 - \left[ \overrightarrow{\mu^0}(G) \right]_1$

$$0 = \overline{I_G} \cdot \left[ \left( \overrightarrow{\Omega_S^0} \right)_2 - \left( \overrightarrow{\Omega_S^0} \right)_1 \right]$$

comme  $\left( \overrightarrow{\Omega_S^0} \right)_1 = 0 \Rightarrow \left( \overrightarrow{\Omega_S^0} \right)_2 = 0$

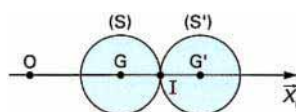


Figure 4 – Choc de deux sphères

Le mouvement, qui était à  $t_1$  une translation, reste, à la fin du choc à l'instant  $t_2$ , un mouvement de translation.

- à  $(S')$  : le résultat est identique.

En conclusion, on peut donc poser :

$$\left(\vec{v}_S^0\right)_2 = v_2 \vec{X}_0 \quad ; \quad \left(\vec{v}_{S'}^0\right)_2 = v_2 \vec{X}_0$$

■ **Théorème de la somme géométrique**

La somme des percussions extérieures est égale à la variation de la quantité de mouvement. En projection :

$$0 = m(v_2 - v_1) + m'(v_2' - v_1')$$

ce qui exprime encore que la vitesse du centre de gravité de l'ensemble des deux sphères n'a pas varié.

**1.6.3 Indétermination du problème**

La théorie générale des percussions nous donne seulement une équation entre deux inconnues  $v_2 - v_1$  et  $v_2' - v_1'$ .

Il faut une équation supplémentaire pour lever l'indétermination. On doit, pour cela, faire une hypothèse sur la nature des corps comme y invite l'expérience qui montre que le rebondissement varie avec la matière constituant les corps.

**1.6.4 Analyse du phénomène de choc**

Pour cela examinons d'abord, d'une manière générale, la façon dont évolue la distance  $GG' = \ell$  pendant l'intervalle  $t_2 - t_1$ . Il faut en effet abandonner la mécanique du solide indéformable pour expliquer le phénomène. On peut distinguer deux phases :

- phase  $t_1 \leq t \leq t^*$   $t^* < t_2$

Les actions  $\vec{F}_{SS'}$  et  $\vec{F}_{S'S}$  augmentent, il y a déformation locale : la distance  $\ell$  diminue ;

- phase  $t^* < t \leq t_2$

Les actions  $\vec{F}_{SS'}$  et  $\vec{F}_{S'S}$  diminuent et par suite  $\ell$  augmente légèrement à cause de l'élasticité plus ou moins parfaite de la matière. La distance  $\ell$  passe par un minimum, ce qui implique que

la vitesse relative  $\vec{v}_{S'}^S$  est nulle ; en effet :

$$\vec{v}_{S'}^S(G') = \frac{d\ell}{dt} \vec{X}_0 = 0$$

**Les vitesses des centres d'inertie sont égales :**

$$\begin{aligned} \vec{v}_{S'}^S &= \vec{v}_{S'}^0 + \vec{v}_0^S \\ 0 &= \vec{v}_{S'}^0 - \vec{v}_0^S = (v' - v) \vec{X}_0 \Rightarrow v' = v \end{aligned}$$

**1.6.5 Levée de l'indétermination. Coefficient de restitution**

■ **Les corps sont parfaitement mous**

On dit que les corps sont parfaitement mous quand ils restent en contact après le choc. Ce qui signifie que la seconde phase n'existe pas :  $t^* = t_2$ .

On a donc alors  $v_2' = v_2$ , en tenant compte de  $m(v_2 - v_1) + m'(v_2' - v_1') = 0$ .

$$\begin{aligned} m v_2 + m' v_2 &= m v_1 + m' v_1' \\ v_2 = v_2' &= \frac{m v_1 + m' v_1'}{m + m'} \end{aligned}$$

■ **Les corps sont parfaitement élastiques**

On dit que les corps sont parfaitement élastiques lorsque, dans la seconde phase du choc, les corps reprennent exactement leur forme initiale, la puissance développée par les forces intérieures étant nulle.

On a alors :  $\frac{dT}{dt} = 0 ; T_2 - T_1 = 0$

soit encore :  $\frac{1}{2} [m v_2^2 + m' v_2'^2] - \frac{1}{2} [m v_1^2 + m' v_1'^2] = 0$

ce qui peut s'écrire :

$$\begin{aligned} m(v_2^2 - v_1^2) + m'(v_2'^2 - v_1'^2) &= 0 \\ m(v_2 - v_1)(v_2 + v_1) + m'(v_2' - v_1')(v_2' + v_1') &= 0 \end{aligned}$$

En tenant compte de la relation générale :

$$m(v_2 - v_1) + m'(v_2' - v_1') = 0$$

on a :  $v_2 + v_1 = v_2' + v_1' ; v_2 - v_2' = v_1' - v_1$

soit :  $(v_2 - v_2') = -(v_1 - v_1')$

ce qui donne vectoriellement :  $\left(\vec{v}_S^S\right)_2 = -\left(\vec{v}_{S'}^S\right)_1$

Au cours du choc, le module du vecteur vitesse relative n'est pas modifié mais il y a changement de sens.

On peut parfaitement déterminer  $v_2$  et  $v_2'$  car nous avons les relations :

$$\begin{cases} m v_2 + m' v_2' = m v_1 + m' v_1' \\ v_2 - v_2' = v_1' - v_1 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$v_2 = v_1 - 2 \frac{v_1 - v_1'}{1 + \frac{m}{m'}} \quad \text{et} \quad v_2' = v_1' + 2 \frac{v_1 - v_1'}{1 + \frac{m}{m'}}$$

■ **Cas remarquables**

$m = m' ; v_2 = v_1' ; v_2' = v_1$

Il y a échange des vitesses : chaque sphère possède après le choc la vitesse qu'avait l'autre avant le choc.

$m' \rightarrow \infty ; v_1' = 0$

C'est le cas d'une balle rigide heurtant une paroi fixe  $v_2 = -v_1$ .

La balle rebondit sans perte de vitesse.

■ **Cas général. Hypothèse de Newton**

Dans le cas réel, les corps ne sont ni parfaitement élastiques ni parfaitement mous.

La vitesse relative des deux sphères change de sens. Sa valeur absolue est multipliée par un coefficient  $\epsilon$  inférieur à 1 appelé coefficient de restitution.

Remarquons que l'on retrouve les cas précédents :

- les corps mous correspondent à  $\epsilon = 0$  ;
- les corps parfaitement élastiques correspondent à  $\epsilon = 1$ .

Cette relation supplémentaire nous permet de déterminer les vitesses  $v_2$  et  $v_2'$ . Pour cela, on a maintenant le système :

$$\begin{cases} mv_2 + m'v_2' = mv_1 + m'v_1' \\ v_2 - v_2' = -\varepsilon(v_1 - v_1') \end{cases}$$

qui donne : 
$$v_2 = \frac{mv_1 + m'v_1' - \varepsilon m'(v_1 - v_1')}{m + m'}$$

et 
$$v_2' = \frac{mv_1 + m'v_1' + \varepsilon m(v_1 - v_1')}{m + m'}$$

● Valeur de  $\varepsilon$

On détermine expérimentalement la valeur de  $\varepsilon$  :

- billes de verre  $\varepsilon = 15/16$
- billes d'ivoire  $\varepsilon = 8/9$
- billes d'acier  $\varepsilon = 5/9$
- billes de liège  $\varepsilon = 5/9$
- billes de bois  $\varepsilon = 1/2$

Dans tous les cas, nous avons suppléé à notre ignorance de la nature exacte du phénomène physique par une hypothèse portant, non sur les actions mécaniques, mais sur les vitesses. Nous constatons, par ailleurs, que nous avons simplement à résoudre des systèmes de Cramer.

● Perte d'énergie cinétique dans le choc (cas général)

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{2} m'(v_2'^2 - v_1'^2)$$

On peut écrire :

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m(v_2 + v_1)(v_2 - v_1) + \frac{1}{2} m'(v_2' + v_1')(v_2' - v_1')$$

En outre, avec la relation fondamentale :

$$m(v_2 - v_1) + m'(v_2' - v_1') = 0$$

on obtient :

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m(v_2 + v_1)(v_2 - v_1) - \frac{1}{2} m'(v_2' + v_1') \frac{m}{m'}(v_2 - v_1)$$

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m(v_2 - v_1)(v_2 - v_2' + v_1 - v_1')$$

d'après la loi de Newton :  $v_2 - v_2' = -\varepsilon(v_1 - v_1')$

d'où :  $T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m(v_2 - v_1)(1 - \varepsilon)(v_1 - v_1')$

$$v_2 - v_1 = \frac{mv_1 + m'v_1' - \varepsilon m'(v_1 - v_1')}{m + m'} - v_1$$

$$v_2 - v_1 = \frac{mv_1 + m'v_1' - mv_1 - m'v_1' - \varepsilon m'(v_1 - v_1')}{m + m'}$$

$$v_2 - v_1 = \frac{m'(v_1' - v_1) - \varepsilon m'(v_1 - v_1')}{m + m'}$$

$$v_2 - v_1 = -\frac{m'}{m + m'}(1 - \varepsilon)(v_1 - v_1')$$

Donc : 
$$T_2 - T_1 = -\frac{1}{2} \frac{m'm}{m + m'}(1 - \varepsilon)^2(v_1 - v_1')^2$$

Il y a toujours perte d'énergie cinétique dans le choc, donc finalement perte d'énergie mécanique.

Deux cas particuliers sont remarquables :

- corps parfaitement mous :  $\varepsilon = 0$

$$T_2 - T_1 = -\frac{1}{2} \frac{m'm}{m + m'}(v_1 - v_1')^2$$

- corps parfaitement élastiques :  $\varepsilon = 1$

$$T_2 - T_1 = 0$$

On retrouve bien là un résultat conforme à la définition du choc parfaitement élastique.

● Percussion de liaison

Nous allons voir que, si l'on peut déterminer la percussion de liaison, cette méthode ne pourra pas, par essence, nous fournir l'action de contact et le temps de choc.

Posons :

$$\widehat{F_{SS'}} = \widehat{F_{SS'}} X_0 \text{ et } \widehat{F_{S'S}} = \widehat{F_{S'S}} X_0$$

avec

$$\widehat{F_{SS'}} + \widehat{F_{S'S}} = 0$$

Appliquons le théorème de la somme algébrique à (S) seul :

$$\widehat{F_{S'S}} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

mais : 
$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -\frac{m'}{m + m'}(1 + \varepsilon)(\vec{v}_1' - \vec{v}_1)$$

donc : 
$$\widehat{F_{S'S}} = -\frac{mm'}{m + m'}(1 + \varepsilon)(\vec{v}_1' - \vec{v}_1)$$

Mais la façon d'aborder le problème ne nous permet pas de connaître la durée du choc.

Désignons par  $\widehat{F_{S'S}}$  l'action de (S') sur (S).

$$\vec{F}_{S'S} = X_{S'S} \vec{X}_0$$

Entre la force et la percussion, nous avons la relation :

$$\widehat{F_{S'S}} = \int_{t_1}^{t_2} X_{S'S} dt$$

La percussion est connue bien que ni la force  $X_{S'S}$  ni la durée du choc ne soient connus.

Si nous connaissons la durée du choc, il sera possible d'évaluer facilement l'action moyenne au cours du choc.

En effet, on peut écrire :

$$\widehat{F_{S'S}} = (X_{S'S})_{\text{moy}}(t_2 - t_1)$$

Exemple

À titre purement indicatif, pour montrer l'extrême importance du rôle de la durée du choc, nous allons calculer  $(X_{S'S})_{\text{moy}}$  en fonction de  $t_2 - t_1$ , en prenant :

$\varepsilon = 1$	$v_1 = 5 \text{ m/s}$
$m = 1 \text{ kg}$	$v_1' = -5 \text{ m/s}$
$m' = 1 \text{ kg}$	$\widehat{F_{S'S}} = -10 \text{ N} \cdot \text{s}$
$t_2 - t_1$	$(X_{S'S})_{\text{moy}}$
(s)	(N)
0,01	1 000
0,001	10 000

Mais nos équations ne nous fournissent aucun moyen pour calculer  $t_2 - t_1$ .

1.7 Théorie de Hertz

Si on connaît la loi de contact entre les corps, on peut étudier le mouvement et les actions au contact en dynamique classique. C'est ce que permet la théorie de Hertz (milieux continus).

## 1.8 Théorème de l'énergie cinétique

Considérons un système mécanique soumis à des percussions  $\widehat{dF}$  appliquées en P. La loi fondamentale pour les percussions donne :

$$\widehat{dF} = \left\{ \left[ \vec{v}^g(P) \right]_2 - \left[ \vec{v}^g(P) \right]_1 \right\} dm$$

En simplifiant l'écriture :

$$\widehat{dF} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) dm$$

Multiplions les deux membres par  $\frac{1}{2}(\vec{v}_2 + \vec{v}_1)$  et sommons pour tous les points matériels du système :

$$\int_{P \in S} \widehat{dF} \cdot \frac{\vec{v}_2 + \vec{v}_1}{2} = \frac{1}{2} \int_{P \in S} (\vec{v}_2)^2 dm - \frac{1}{2} \int_{P \in S} (\vec{v}_1)^2 dm$$

**Théorème.** La variation d'énergie cinétique pendant un choc est égale au travail qui serait développé par les actions de percussion si le point d'application de chacune d'elles avait pour vitesse la vitesse moyenne arithmétique entre  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ , vitesses en début et fin de choc.

## 2. Choc sans frottement entre solides

### 2.1 Analyse générale du choc

La théorie du choc est grandement simplifiée si l'on néglige le frottement. Cette hypothèse est valable dans de nombreux cas. En outre, elle permet une approche simple d'un grand nombre de problèmes.

#### 2.1.1 Effet d'une percussion sur un solide libre

Soit  $\widehat{F}$  une percussion appliquée en A appartenant au solide (S) de masse M (figure 5).

On la représente par  $\widehat{F} = \widehat{F} \vec{u}$ , avec  $\vec{u}$  vecteur unitaire.

Appliquons les théorèmes généraux.

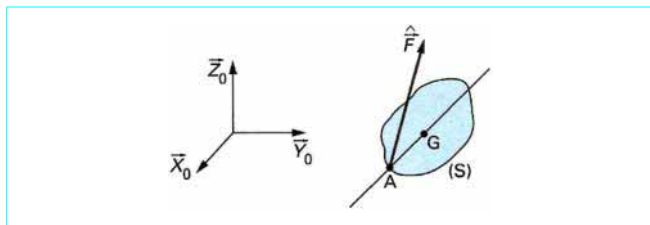


Figure 5 – Effet d'une percussion sur un solide libre

#### ■ Théorème de la somme

$$\widehat{F} = M \left( \left[ \vec{v}^g(G) \right]_2 - \left[ \vec{v}^g(G) \right]_1 \right)$$

$$\widehat{F} = M \Delta \vec{v} \quad \text{avec} \quad \Delta \vec{v} = \left( \left[ \vec{v}^g(G) \right]_2 - \left[ \vec{v}^g(G) \right]_1 \right)$$

#### ■ Théorème du moment cinétique

$$\vec{GA} \wedge \widehat{F} = \left( \left[ \vec{\mu}^g(G) \right]_2 - \left[ \vec{\mu}^g(G) \right]_1 \right)$$

Désignons par  $[G; \vec{X}_S, \vec{Y}_S, \vec{Z}_S]$ , le repère principal d'inertie ( $R_S$ ).

$$\vec{\mu}^g(G) = \overline{\overline{I}}_G \cdot \vec{\Omega}_S^g; \quad \overline{\overline{I}}_G = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_S}$$

$$\left[ \vec{\mu}^g(G) \right]_2 - \left[ \vec{\mu}^g(G) \right]_1 = \overline{\overline{I}}_G \cdot \Delta \vec{\Omega}_S^g$$

en posant  $\Delta \vec{\Omega}_S^g = \left( \vec{\Omega}_S^g \right)_2 - \left( \vec{\Omega}_S^g \right)_1$

$$\text{Donc :} \quad \vec{GA} \wedge \widehat{F} = \overline{\overline{I}}_G \cdot \Delta \vec{\Omega}_S^g$$

$$\text{d'où :} \quad \overline{\overline{I}}_G^{-1} \cdot \vec{GA} \wedge \widehat{F} = \Delta \vec{\Omega}_S^g$$

$$\overline{\overline{I}}_G^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix}_{R_S}$$

Nous allons montrer que l'on peut relier la percussion  $\widehat{F}$  à la projection de  $\vec{v}^0(A)$  sur la direction  $\widehat{F}$ .

$$\vec{v}^0(A) = \vec{v}^0(G) + \vec{\Omega}_S^0 \wedge \vec{GA}$$

Projetons ce vecteur sur  $\vec{u}$ .

$$\vec{v}^0(A) \cdot \vec{u} = \vec{v}^0(G) \cdot \vec{u} + \left( \vec{\Omega}_S^0 \wedge \vec{GA} \right) \cdot \vec{u}$$

Posons  $\vec{v}^0(A) \cdot \vec{u} = w_S^0$ .

La projection du vecteur vitesse de A sur  $\vec{u}$  peut être notée :

$$w_S^0 = w_S^0 \vec{u}$$

$$w_S^0 = \left[ \vec{v}^0(A) \cdot \vec{u} \right] \cdot \vec{u}$$

Pendant le choc  $\vec{u}$  et  $\vec{GA}$  sont fixes.

$$\Delta w_S^0 = \Delta \vec{v} \cdot \vec{u} + \left( \vec{GA} \wedge \vec{u} \right) \cdot \Delta \vec{\Omega}_S^g$$

$$\Delta w_S^0 = \frac{\widehat{F}}{M} \cdot \vec{u} + \left( \vec{GA} \wedge \vec{u} \right) \cdot \overline{\overline{I}}_G^{-1} \left( \vec{GA} \wedge \vec{u} \right) \cdot \widehat{F}$$

$$\Delta w_S^0 \cdot \vec{u} = \frac{\left( \widehat{F} \cdot \vec{u} \right)}{M} \cdot \vec{u} + \widehat{F} \cdot \left[ \left( \vec{GA} \wedge \vec{u} \right) \left( \overline{\overline{I}}_G^{-1} \vec{GA} \wedge \vec{u} \right) \right] \cdot \vec{u}$$



Soit encore :

$$\overrightarrow{\Delta w}_S^0 = \frac{\widehat{F}}{M} + \left[ \left( \overrightarrow{GA} \wedge \vec{u} \right) \cdot \overline{I}_G^{-1} \left( \overrightarrow{GA} \wedge \vec{u} \right) \right] \cdot \widehat{F}$$

Posons :  $\overrightarrow{GA} \wedge \vec{u} = [\ell, m, n]_{R_S}$  :

$$\overrightarrow{\Delta w}_S^0 = \left[ \frac{1}{M} + \frac{\ell^2}{A} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{C} \right] \cdot \widehat{F}$$

Cela signifie que la variation de la projection de la vitesse du point d'application sur la direction de la percussion est proportionnelle à la percussion.

Si le point G appartient au support de la percussion, alors :

$$\overrightarrow{\Delta w}_S^0 = \frac{\widehat{F}}{M}$$

### 2.1.2 Indétermination du problème de choc de deux solides

Faisons le bilan des équations et des inconnues.

#### ■ Équations

On peut appliquer les théorèmes généraux à chacun des deux solides (S) et (S').

Au total nous aurons 12 équations.

#### ■ Inconnues

- **Paramètres inconnus** : les positions de chacun des solides ne varient pas au cours du choc. Il suffit donc seulement de connaître l'état des vitesses après choc, c'est-à-dire finalement les dérivées des 12 paramètres.

- **Inconnues dynamiques** : c'est la percussion de contact  $\widehat{F}_{SS'}$  = -  $\widehat{F}_{S'S}$ . Il suffit de connaître sa valeur algébrique. Il y a donc une inconnue dynamique.

Au total, il y a donc 13 inconnues alors que les théorèmes généraux nous fournissent seulement 12 équations. Le problème est donc indéterminé du fait que, jusqu'ici, aucune hypothèse n'a été faite sur la nature du contact.

### 2.1.3 Étude du contact entre deux solides au cours d'un choc

Soit deux solides libres (S) et (S') (figure 6).

La mécanique du solide invariable suppose invariables les distances des éléments mais cela est difficilement compatible avec le phénomène de choc où les déformations locales ont une grande importance.

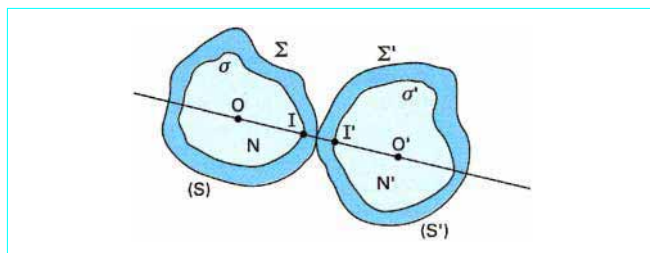


Figure 6 - Contact entre deux solides au cours d'un choc

La mécanique classique y supplée de la manière suivante, en supposant que les déformations ne sont sensibles qu'au voisinage des contacts.

On suppose que chaque solide est formé de deux parties :

- un noyau (N) parfaitement rigide limité par une surface ( $\sigma$ ) ;
- une pellicule de masse négligeable qui subit seule la déformation. Elle est comprise entre ( $\sigma$ ) et ( $\Sigma$ ).

#### 2.1.3.1 Contact géométrique. Contact mécanique

**Contact géométrique** : il est réalisé lorsque les deux surfaces ( $\sigma$ ) et ( $\sigma'$ ) viennent en contact.

**Contact mécanique** : il est réalisé lorsque les deux surfaces externes ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma'$ ) viennent en contact.

Cette façon de voir correspond au problème observé, d'une part, et, d'autre part, à une façon de voir généralement adoptée.

Mais si deux solides (S) et (S') sont liés par un ressort, on ne considère pas qu'il s'agit d'une liaison au sens de la géométrie ou de la cinématique, car chacun des solides peut du point de vue géométrique se déplacer sans être gêné.

#### 2.1.3.2 Vitesse de pénétration

Nous allons définir de manière intrinsèque ce que l'on appelle vitesse de pénétration des solides, qui est leur **vitesse de rapprochement lorsqu'ils sont en contact**.

Soit O et O' deux points appartenant aux noyaux de (S) et (S') et situés sur la normale commune (figure 7) ; posons :

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{OO'}}{\|\overrightarrow{OO'}\|}$$

Soit deux points P<sub>1</sub> et P<sub>2</sub> appartenant aux noyaux. D'après la cinématique du solide invariable :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}_{S'}^S(P_2) &= \overrightarrow{v}_{S'}^S(P_1) + \overrightarrow{\Omega}_{S'}^S \wedge \overrightarrow{P_1P_2} \\ \overrightarrow{v}_{S'}^S(P_2) \cdot \vec{n} &= \overrightarrow{v}_{S'}^S(P_1) \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

Ce n'est autre que le théorème de l'équiprojectivité ; toutes les vitesses des points situés sur la normale commune ont même projection sur cette normale commune.

Posons :  $\overrightarrow{W}_{S'}^S = \left[ \overrightarrow{v}_{S'}^S(P_1) \cdot \vec{n} \right] \cdot \vec{n}$ , soit encore :

$$\overrightarrow{W}_{S'}^S = W_{S'}^S \cdot \vec{n} \quad \text{avec} \quad W_{S'}^S = \overrightarrow{v}_{S'}^S(P_1) \cdot \vec{n}$$

$$\overrightarrow{W}_{S'}^S = \left[ \overrightarrow{v}_{S'}^S(P_1) \cdot \frac{\overrightarrow{OO'}}{\|\overrightarrow{OO'}\|} \right] \frac{\overrightarrow{OO'}}{\|\overrightarrow{OO'}\|}$$

$$\overrightarrow{W}_{S'}^S = \frac{1}{(\overrightarrow{OO'})^2} \left[ \overrightarrow{v}_{S'}^S(P_1) \cdot \overrightarrow{OO'} \right] \cdot \overrightarrow{OO'}$$

$\overrightarrow{W}_{S'}^S$  est appelé vitesse de pénétration de (S')/(S).

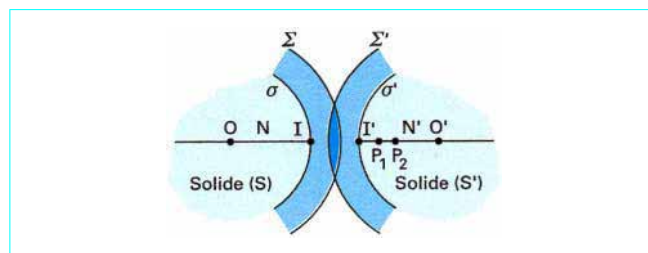


Figure 7 - Vitesse de pénétration des solides

**2.1.3.3 Les différentes phases du choc**

— Il y a d’abord une phase de compression pendant laquelle  $\vec{W}_{S'}^S$  est dirigé vers (S). Les deux corps se rapprochent, les pellicules se déforment.

— La vitesse relative  $\vec{W}_{S'}^S$  s’annule pour  $t = t^* \in ]t_1, t_2[$ , puis elle change de sens.

— Ensuite, les pellicules reprennent plus ou moins leur forme primitive. C’est la phase de restitution.

**2.1.3.4 Différents cas possibles. Levée de l’indétermination**

■ **Corps parfaitement mous**

Seule la première phase existe. La déformation subsiste. La caractéristique d’un corps mou est :

$$\begin{aligned} \vec{W}_{S'}^S &= \vec{0} \\ \vec{W}_{S'}^S(P) \cdot \vec{n} &= 0 \\ \left[ \vec{W}_{S'}^0(P) - \vec{v}_{S'}^0(P) \right] \cdot \vec{n} &= 0 \end{aligned}$$

■ **Corps parfaitement élastiques**

On dit que les corps sont parfaitement élastiques s’ils reprennent après choc leur forme initiale, le travail développé par les forces intérieures étant nul.

On montre que cette hypothèse conduit au fait que la composante normale de  $\vec{W}_{S'}^S(P)$  change de sens pendant le choc sans changer de valeur absolue :

$$\left( \vec{W}_{S'}^S \right)_2 = - \left( \vec{W}_{S'}^S \right)_1$$

■ **Cas général : corps quelconques**

Les solides ne sont jamais ni parfaitement mous ni parfaitement élastiques. On adopte alors l’hypothèse de Newton.

On pose : 
$$\left( \vec{W}_{S'}^S \right)_2 = -\varepsilon \left( \vec{W}_{S'}^S \right)_1$$

Si  $\varepsilon = 0$ , les corps sont parfaitement mous.

Si  $\varepsilon = 1$ , les corps sont parfaitement élastiques.

**2.1.3.5 Perte d’énergie cinétique**

Il y a toujours perte d’énergie cinétique au cours du choc.

On a toujours 
$$\widehat{F}_{SS'} + \widehat{F}_{S'S} = 0 :$$

$$\left( \vec{W}_S^0 \right)_2 - \left( \vec{W}_S^0 \right)_1 = K \widehat{F}_{S'S} \quad K > 0$$

$$\left( \vec{W}_{S'}^0 \right)_2 - \left( \vec{W}_{S'}^0 \right)_1 = K' \widehat{F}_{SS'} \quad K' > 0$$

$$\left( \vec{W}_{S'}^S \right)_2 - \left( \vec{W}_{S'}^S \right)_1 = (K' + K) \widehat{F}_{SS'}$$

$$\widehat{F}_{SS'} = \frac{\left( \vec{W}_{S'}^S \right)_2 - \left( \vec{W}_{S'}^S \right)_1}{(K' + K)}$$

Par ailleurs, les théorèmes de l’énergie cinétique donnent :

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= \widehat{F}_{SS'} \frac{\left( \vec{v}_{S'}^g \right)_2 + \left( \vec{v}_{S'}^g \right)_1}{2} + \widehat{F}_{S'S} \frac{\left( \vec{v}_S^g \right)_2 + \left( \vec{v}_S^g \right)_1}{2} \\ &= \widehat{F}_{SS'} \frac{\left( \vec{W}_{S'}^S \right)_2 + \left( \vec{W}_{S'}^S \right)_1}{2} \\ T_2 - T_1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{K + K'} \left[ \left( \vec{W}_{S'}^S \right)_2^2 - \left( \vec{W}_{S'}^S \right)_1^2 \right] \end{aligned}$$

Mais : 
$$\left( \vec{W}_{S'}^S \right)_2 = -\varepsilon \left( \vec{W}_{S'}^S \right)_1$$

donc : 
$$T_2 - T_1 = -\frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2) \frac{1}{K + K'} \left( \vec{W}_{S'}^S \right)_1^2$$

Cette formule montre que la perte d’énergie cinétique est maximale pour  $\varepsilon = 0$ . Elle est nulle pour  $\varepsilon = 1$ .

■ **Cas particuliers**

● Si G et G’ appartiennent à la normale,  $K = \frac{1}{M}$  et  $K' = \frac{1}{M'}$ , M et M’ étant les masses de S et S’ :

$$T_2 - T_1 = -\frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2) \frac{MM'}{M + M'} \left( \vec{W}_{S'}^S \right)_1^2$$

● Si le choc est mou ( $\varepsilon = 0$ ) : 
$$\widehat{F}_{SS'} = -\frac{\left( \vec{W}_{S'}^S \right)_1}{K + K'}$$

● Si le choc est élastique : 
$$\widehat{F}_{SS'} = -2 \frac{\left( \vec{W}_{S'}^S \right)_1}{K + K'}$$

**La percussion est deux fois plus élevée en choc élastique qu’en choc mou.** Cela a une grande importance dans le choix des matériaux subissant les chocs.

**2.2 Méthode d’étude d’un problème comportant un choc**

**2.2.1 Les trois phases de l’étude**

Un problème de mécanique comportant un choc s’étudie en trois étapes pour traiter à part le phénomène du choc.

■ **Première phase** : mouvement avant choc  $t_0 \leq t < t_1$ .

Il s’étudie à l’aide des théorèmes généraux des équations de Lagrange. Cette étude permet de connaître positions et vitesses au début du choc, c’est-à-dire les conditions initiales du choc.

■ **Deuxième phase** : choc proprement dit :  $t_1 \leq t \leq t_2$ .

L’étude à l’aide de la théorie du choc permet de connaître l’état des vitesses en fin de choc. Comme la position du système n’a pas varié, la position est connue. On connaît donc les conditions initiales pour la phase suivante.

■ **Troisième phase** : mouvement après choc :  $t > t_2$ .

Il s’étudie comme la première phase avec, comme conditions initiales, les conditions de fin de choc. C’est cette phase qui sera très importante.

### 2.2.2 Étude de la traction par choc en supposant le choc mou

Le solide (S) de masse  $m$  tombe sur le solide (S') de masse  $m'$  d'une hauteur  $h$  (figure 8). On se propose de trouver la tension dans la barre qui résulte du choc.

#### ■ Étude du mouvement juste avant le choc

Elle est ici élémentaire et les résultats sont connus.

##### ● Solide (S)

Position  $\vec{OA}' = z^* \vec{Z}_0$  ; vitesse  $\vec{v}^0 = v \vec{Z}_0$  ;  $v_1 = \sqrt{2gh}$ .

##### ● Solide (S')

Position  $\vec{OA} = z^* \vec{Z}_0$  ; vitesse  $\vec{v}^0 = v' \vec{Z}_0$  ;  $v'_1 = 0$ .

Au moment du choc A et A' sont confondus.

Cette étude peut être un problème en soi.

#### ■ Étude de la phase de choc. Vitesse en fin de choc

Position en fin de choc : elle est égale à celle en début de choc car il n'y a pas variation de position.

Vitesse en fin de choc : on applique le théorème de la somme géométrique.

En projection sur  $\vec{Z}_0$ , cela donne :

$$m(v_2 - v_1) + m'(v'_2 - v'_1) = 0$$

$v'_1 = 0$  (S' est initialement immobile) ;

$v'_2 - v_2 = 0$  (choc mou).

En portant ces deux résultats dans l'équation du choc, on obtient :

$$v_2 = \frac{m}{m+m'} v_1$$

$$v_2 = \frac{m}{m+m'} \sqrt{2gh}$$

#### ■ Étude du mouvement de l'ensemble après choc

On suppose la barre équivalente à un ressort de raideur  $K$  :

$$-K(z - z_0) + (m + m')g = (m + m')z''$$

avec  $z_0$  longueur du ressort sans contrainte.

Posons  $z = z^* + \bar{z}$  avec  $z^*$  position d'équilibre ;  $\bar{z}$  déplacement à partir de l'équilibre.

$$\text{Mais : } -K(z^* - z_0) + m'g = 0 ; z^* = z_0 + \frac{m'g}{K}$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$(m + m')\bar{z}'' + K\bar{z} = mg$$

$$\bar{z}'' + \frac{K}{m+m'}\bar{z} = \frac{m}{m+m'}g$$

Posons  $\Omega = \sqrt{\frac{K}{m+m'}}$ , la solution de cette équation différentielle classique est :

$$\bar{z} = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t + \frac{mg}{K}$$

A et B se déterminent avec les conditions initiales, qui sont celles de fin de choc. Pour la simplicité de l'écriture, nous réinitialisons le temps  $t = t_2 \rightarrow t_2 = 0$ .

$$\bar{z}(0) = 0$$

$$\bar{z}'(0) = \frac{m}{m+m'} \sqrt{2gh}$$

$$\bar{z} = \frac{mg}{K} (1 - \cos \Omega t) + \frac{m\sqrt{2gh}}{\sqrt{K(m+m')}} \sin \Omega t$$

#### ■ Calcul de la flèche maximale et de la force maximale de tension

##### ● Flèche maximale

$$|\bar{z}|_M = \frac{mg}{K} + \sqrt{\frac{m^2 g^2}{K^2} + \frac{2m^2 gh}{K(m+m')}}$$

Posons  $\frac{mg}{K} = f_s$  (flèche statique, c'est-à-dire due au poids  $mg$ ).

$$|\bar{z}|_M = f_s \cdot \eta$$

$$\text{avec } \eta = 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{h}{f_s} \frac{1}{1 + \frac{m'}{m}}}$$

$\eta$  est appelé amplification dynamique.

##### ● Force maximale de tension

$$F_M = K(z_M - z_0) = K(z^* + \bar{z}_M - z_0)$$

$$F_M = m'g + K \bar{z}_M$$

$$F_M = g(m' + \eta \cdot m)$$

##### Exemple

Pour illustrer les effets très importants d'un choc, prenons les éléments suivants :

$$m = 8 \text{ kg} ; m' = 0 \text{ (butée)} ; h = 0,25 \text{ m} ; K = 4 \times 10^7 \text{ N/m}$$

Cette valeur de  $K$  correspond à une barre en acier de 2 m de long et de 4 cm<sup>2</sup> de section.

On trouve :

$$f_s = 2 \times 10^{-6} \text{ m} ; \eta = 500 ; F_M = 40\,000 \text{ N}$$

On peut réduire considérablement l'amplification dynamique en mettant un ressort en série avec la barre (figure 9).

C'est le principe de nombreux dispositifs de sécurité (automobile, fixation de sécurité des skis, emballage des produits fragiles).

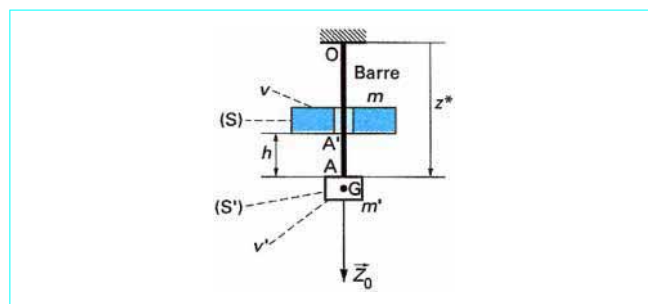


Figure 8 – Traction par choc

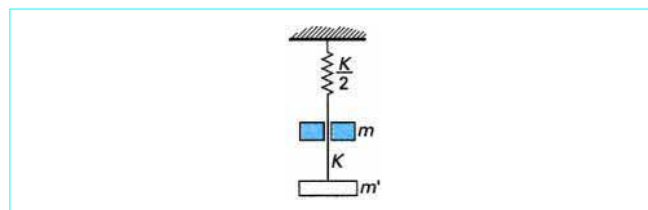


Figure 9 – Diminution des effets du choc

### 3. Choc avec frottement entre solides

La théorie du choc avec frottement présente de nombreuses difficultés. Mais son intérêt est indiscutable pour un grand nombre de problèmes où l'approximation du coefficient de frottement nul ne permet pas la compréhension des phénomènes, comme dans le cas de l'impact d'un club contre une balle de golf où c'est le frottement qui permet la mise en rotation très rapide de la balle.

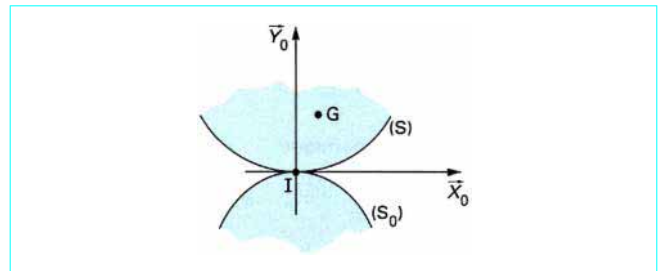


Figure 10 – Choc de deux plaques planes

#### 3.1 Cas d'une plaque mobile (S) heurtant une plaque fixe (S0)

La théorie et les méthodes seront étudiées dans ce cas particulier (figure 10) pour éviter des développements laborieux et mettre en avant la méthode utilisée.

- La plaque (S) est mobile dans le plan  $(\vec{X}_0, \vec{Y}_0)$ .
- $(I; \vec{X}_0, \vec{Y}_0)$  est un repère utilisable pour la théorie du choc ;
- $\vec{Y}_0$  est la normale extérieure à  $(S_0)$  ;
- $\vec{Z}_0$  est la normale au plan des plaques ;
- $\vec{X}_0$  est choisi de manière que, si l'on désigne par  $[a, b, 0]$  les coordonnées de G, on ait  $ab > 0$  (coordonnées de même signe).

En I, l'action de contact est  $\vec{F}_{0S} = [X_{0S}, Y_{0S}, 0]_{R_0}$  ou, pour simplifier l'écriture,  $\vec{F}_{0S} = [X, Y, 0]_{R_0}$ . Elle donne lieu à la percussion :

$$\widehat{F}_{0S} = [\widehat{X}, \widehat{Y}, 0]_{R_0}$$

On pose :  $\vec{v}^0(G) = [\alpha, \beta, 0]_{R_0}$  ;  $\vec{v}_S^0(I) = [u, v, 0]_{R_0}$

Les quantités  $\alpha, \beta, u, v$  se calculent à partir des paramètres qui définissent les positions de (S) et de  $(S_0)$ . Remarquons que  $\vec{v}_S^0(I)$  n'est pas ici la vitesse de glissement car il y a pénétration. La vitesse de glissement est seulement la projection de ce vecteur sur la tangente  $\vec{X}_0$  soit :

$$\vec{v}_g = [u, 0, 0]_{R_0}$$

La vitesse de glissement de (S)/(S0) est le vecteur  $\vec{v}_g$  lorsque l'on suppose la vitesse de déformation  $v$  nulle. C'est donc :

$$\vec{v}_g = \vec{n} \wedge \vec{v}_S^0(I) \wedge \vec{n}$$

##### 3.1.1 Théorèmes généraux de la théorie du choc

###### ■ Théorème de la somme géométrique

$$\widehat{X} = M(\alpha_2 - \alpha_1) \tag{1}$$

$$\widehat{Y} = M(\beta_2 - \beta_1) \tag{2}$$

###### ■ Théorème du moment cinétique en G

$$\vec{GI} \wedge \widehat{F}_{0S} = (\vec{\mu}^0(G))_2 - (\vec{\mu}^0(G))_1$$

$$\vec{GI} \wedge \widehat{F}_{0S} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} \wedge \begin{bmatrix} \widehat{X} \\ \widehat{Y} \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a\widehat{Y} + b\widehat{X} \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{\mu}^0(G) = \overline{I}_G \cdot \vec{\omega}_S^0$$

$$\vec{\mu}^0(G) = \begin{bmatrix} A - B & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

On pose  $C = M\rho^2$ ,  $\rho$  étant le rayon de giration.

Donc :  $-a\widehat{Y} + b\widehat{X} = M\rho^2(\omega_2 - \omega_1)$  (3)

Le problème serait parfaitement résoluble si l'on connaissait :  
 — les lois qui régissent la percussion de contact (loi de Coulomb).  
 Mais il faut pour cela connaître l'état de la vitesse de glissement ;  
 — la condition de fin de choc. Nous prendrons provisoirement celle de Darboux :

$$v_2 = -\varepsilon v_1 \tag{4}$$

Les lois qui régissent l'action de contact, et donc aussi celle de la percussion de contact, seront connues lorsque l'on connaîtra  $\vec{v}_g$ , donc en étudiant ce qui se passe pendant l'intervalle  $[t_1, t_2]$  à l'aide des théorèmes généraux pour les forces finies. On utilise simultanément les théorèmes généraux des forces finies et les théorèmes généraux du choc.

##### 3.1.2 Application des théorèmes généraux

###### ■ Théorèmes de la somme géométrique

$$M \frac{d\alpha}{dt} = X \tag{5}$$

$$M \frac{d\beta}{dt} = Y \tag{6}$$

###### ■ Théorèmes du moment dynamique

$$M\rho^2 \frac{d\omega}{dt} = bX - aY \tag{7}$$

Pour résoudre le problème, il faut connaître, par les lois de Coulomb, la relation entre X et Y, donc connaître la vitesse de glissement.

■ Calcul de  $\vec{v}_S^0(I)$

$$\begin{aligned} \vec{v}_S^0(I) &= \vec{v}_S^0(G) + \Omega_S^0 \wedge \overrightarrow{GI} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha + b\omega \\ \beta - a\omega \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} \end{aligned}$$

Donc : 
$$\begin{cases} u = \alpha + b\omega \\ v = \beta - a\omega \end{cases} \quad (8)$$

La vitesse de glissement est, rappelons-le :

$$\vec{v}_g = (\alpha + b\omega) \vec{X}_0 \text{ ou } \vec{v}_g = u \vec{X}_0$$

**Remarque**

On peut passer des équations (5), (6), (7) aux équations (1), (2), (3) par intégration par rapport au temps, en négligeant les percussions dues aux forces finies (il n'y en a pas ici) et en admettant qu'il n'y a pas variation de position.

$$M d\alpha = X dt; M d\beta = Y dt$$

$$M \rho^2 d\omega = b X dt - a Y dt$$

$$M(\alpha_2 - \alpha_1) = \int_{t_1}^{t_2} X dt; M(\beta_2 - \beta_1) = \int_{t_1}^{t_2} Y dt$$

$$M \rho^2 (\omega_2 - \omega_1) = b \int_{t_1}^{t_2} X dt - a \int_{t_1}^{t_2} Y dt$$

mais

$$\int_{t_1}^{t_2} X dt = \hat{X}; \int_{t_1}^{t_2} Y dt = \hat{Y}$$

et l'on retrouve bien les équations du choc.

**3.1.3 Relation entre les composantes de la force et les dérivées de la vitesse  $\vec{v}_S^0(I)$**

Les équations (8) donnent :

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + b \frac{d\omega}{dt}; \frac{dv}{dt} = \frac{d\beta}{dt} - a \frac{d\omega}{dt}$$

en tenant compte de (5), (6) et (7), on aura :

$$\frac{du}{dt} = \frac{X}{M} + b \frac{bX - aY}{M\rho^2}; \frac{dv}{dt} = \frac{Y}{M} - a \frac{bX - aY}{M\rho^2}$$

soit encore : 
$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{M\rho^2} (\rho^2 - b^2) X - \frac{ab}{M\rho^2} Y$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{ab}{M\rho^2} X + \frac{1}{M\rho^2} (\rho^2 + a^2) Y$$

$\frac{du}{dt}$  et  $\frac{dv}{dt}$  s'expriment linéairement en fonction de X et Y sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho^2 + b^2}{M\rho^2} & -\frac{ab}{M\rho^2} \\ -\frac{ab}{M\rho^2} & \frac{\rho^2 + a^2}{M\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (9)$$

On désigne par [G] la matrice de (9) et on pose :

$$f_1 = \frac{\rho^2 + a^2}{ab} \quad f_2 = \frac{ab}{\rho^2 + b^2}$$

Remarque :  $\frac{f_1}{f_2} = \frac{(\rho^2 + a^2)(\rho^2 + b^2)}{(ab)^2} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} > 1$

On peut ainsi écrire :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\rho^2 + b^2}{M\rho^2} \left( X - \frac{ab}{\rho^2 + b^2} Y \right); \frac{dv}{dt} = \frac{ab}{M\rho^2} \left( \frac{\rho^2 + a^2}{ab} Y - X \right)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\rho^2 + b^2}{M\rho^2} (X - f_2 Y) \quad (10)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ab}{M\rho^2} (f_1 Y - X) \quad (11)$$

On peut naturellement exprimer X et Y en fonction de  $\frac{du}{dt}$  et  $\frac{dv}{dt}$  par la transformation inverse.

Le déterminant de la matrice [G] est :

$$\Delta = \frac{\rho^2 + a^2 + b^2}{M^2 \rho^2}$$

$$[G]^{-1} = \frac{M^2 \rho^2}{\rho^2 + a^2 + b^2} \begin{bmatrix} \frac{\rho^2 + a^2}{M\rho^2} & \frac{ab}{M\rho^2} \\ \frac{ab}{M\rho^2} & \frac{\rho^2 + b^2}{M\rho^2} \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2 + a^2 + b^2} & \frac{Mab}{\rho^2 + a^2 + b^2} \\ \frac{Mab}{\rho^2 + a^2 + b^2} & M \frac{\rho^2 + b^2}{\rho^2 + a^2 + b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} \quad (12)$$

X et Y s'expriment linéairement en fonction de  $\frac{du}{dt}$  et  $\frac{dv}{dt}$ .

**3.1.4 Discussion**

Elle se fait en fonction de la vitesse de glissement et, en particulier, de sa valeur initiale  $u_1$ . Trois circonstances peuvent se présenter :

$$u_1 < 0; u_1 > 0; u_1 = 0$$

On suit l'évolution de la vitesse de glissement en cherchant le lieu de l'extrémité du point M, tel que  $\vec{OM} = [u, v, 0]$ . La courbe décrite est l'**hodographe du choc**.

■ La vitesse de glissement initiale est positive :  $u_1 > 0$

La composante tangentielle X est donc négative au début du choc :

$$|X| = f|Y| \text{ donc } X = -f|Y|$$

mais  $Y > 0$  (choc), donc :  $X = -fY$

Les relations (10) et (11) donnent alors :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\rho^2 + b^2}{M\rho^2} (f + f_2) Y \quad (13)$$

$$\frac{dv}{dt} = +\frac{ab}{M\rho^2} (f + f_1) Y \quad (14)$$

avec  $Y > 0$ .

La relation (13) montre que  $u$  est une fonction décroissante du temps. En faisant le rapport membre à membre de (14) et (13), on obtient :

$$\frac{dv}{du} = -f_2 \frac{f+f_1}{f+f_2} \quad (15)$$

donc  $\frac{dv}{du}$  est constant.

La trajectoire du point M est donc une droite d'équation :

$$v - v_1 = -f_2 \frac{f+f_1}{f+f_2} (u - u_1)$$

( $v_1$  est négatif du fait même qu'il y a choc).

Cette équation est valable depuis  $t = t_1$  jusqu'à un certain temps  $t^* \in ]t_1, t_2[$ .

Remarquons que jamais  $u$  ne peut redevenir positif s'il s'est annulé.

En effet, s'il y a glissement positif, on a toujours :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\rho^2 + b^2}{M\rho^2} (f+f_2)Y$$

La fonction  $u$  ne peut être que décroissante. Si elle a la valeur 0, elle garde donc la valeur 0. On doit donc envisager les éventualités suivantes :

- $u$  ne s'annule pas et reste positive jusqu'à la fin du choc ;
- $u$  s'annule et reste nulle jusqu'à la fin du choc ;
- $u$  s'annule et devient négative jusqu'à la fin du choc.

On peut représenter graphiquement cela de la manière suivante.

● 1<sup>re</sup> hypothèse :  $u > 0$  jusqu'à  $t = t_2$  (figure 11)

Nous allons maintenant chercher quelles conditions doivent remplir  $u_1$  et  $v_1$  pour que l'hypothèse soit vérifiée pour une position de choc.

Pour être dans ces circonstances, il faut et il suffit que le choc soit terminé lorsque  $u$  est toujours positif (ou éventuellement nul).

L'équation de l'hodographe donne :

$$v_2 - v_1 = -f_2 \frac{f+f_1}{f+f_2} (u_2 - u_1) ; (1+\varepsilon)v_1 = f_2 \frac{f+f_1}{f+f_2} (u_2 - u_1)$$

$$u_2 = u_1 + (1+\varepsilon) \frac{f+f_2}{f_2(f+f_1)} v_1$$

$u_2$  doit être positif ou nul

Calculons maintenant  $u_1$ .

$$u_1 + \frac{f+f_2}{f_2(f+f_1)} (1+\varepsilon) v_1 \geq 0 \quad v_1 = -|v_1|$$

$$u_1 \geq \frac{-(f+f_2)}{f_2(f+f_1)} (1+\varepsilon) v_1 \quad \text{ou} \quad u_1 \geq \frac{f+f_2}{f_2(f+f_1)} (1+\varepsilon) |v_1|$$

soit encore :

$$\frac{u_1}{|v_1|} \geq \frac{f+f_2}{f_2(f+f_1)} (1+\varepsilon)$$

Autrement dit, il faut que  $u_1$  soit suffisamment grand par rapport à  $|v_1|$ .

Si l'on est dans ces circonstances, les équations sont valables du début à la fin du choc.

Nous pouvons maintenant déterminer complètement le problème.

**Détermination des inconnues**

Les inconnues du problème sont  $\alpha_2, \beta_2, \omega_2, \widehat{X}, \widehat{Y}$ . Pour les déterminer, nous avons :

— les équations du mouvement :

$$\widehat{X} = M(\alpha_2 - \alpha_1) ; \widehat{Y} = M(\beta_2 - \beta_1)$$

$$b\widehat{X} - a\widehat{Y} = M\rho^2(\omega_2 - \omega_1)$$

Remarquons qu'au lieu de déterminer  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  il est suffisant de déterminer  $u_2$  et  $v_2$  pour connaître l'état du mouvement après choc. En effet :

$$\begin{cases} u = \alpha + b\omega \\ v = \beta - a\omega \end{cases}$$

— la condition de fin de choc :  $v_2 = -\varepsilon v_1$  ;

— en outre s'ajoute maintenant la loi de Coulomb dont nous venons de préciser les conditions d'application : il y a glissement du début à la fin du choc et glissement positif :

$$|\widehat{X}| = f|\widehat{Y}| ; \widehat{X} = -f\widehat{Y}$$

ce qui nous fournit la relation supplémentaire qui nous manquait.

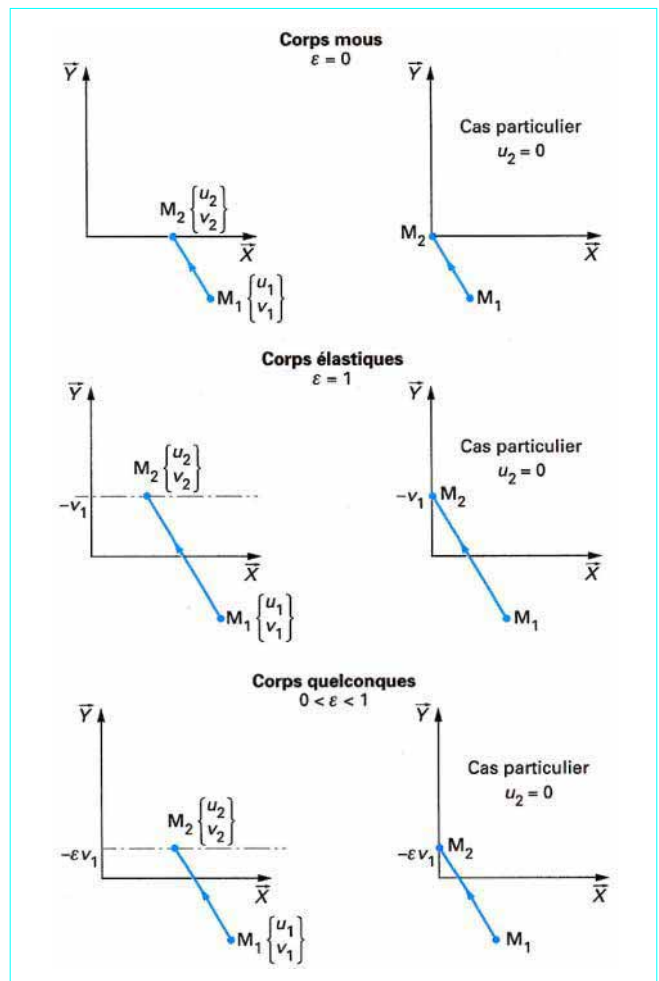


Figure 11 - Hodographe du choc pour  $u_1 > 0$

Nous avons maintenant 5 inconnues. On peut remplacer, dans les équations du mouvement, les termes en  $\alpha, \beta$  par des expressions correspondantes en  $u, v$  :

$$\alpha_2 - \alpha_1 = u_2 - u_1 - b(\omega_2 - \omega_1)$$

$$\beta_2 - \beta_1 = v_2 - v_1 + a(\omega_2 - \omega_1)$$

$$\widehat{X} = M[u_2 - u_1 - b(\omega_2 - \omega_1)]$$

$$\widehat{Y} = M[v_2 - v_1 + a(\omega_2 - \omega_1)]$$

Or  $\widehat{X} = -f\widehat{Y}$ , donc :

$$-(bf + a)\widehat{Y} = M\rho^2(\omega_2 - \omega_1)$$

d'où :  $\widehat{Y} = -\frac{M\rho^2}{a+bf}(\omega_2 - \omega_1)$  ;  $\widehat{X} = \frac{M\rho^2 f}{a+bf}(\omega_2 - \omega_1)$

Mais :  $M[v_2 - v_1 + a(\omega_2 - \omega_1)] = -\frac{M\rho^2}{a+bf}(\omega_2 - \omega_1)$

soit :  $\omega_2 - \omega_1 = \frac{a+bf}{a^2 + \rho^2 + abf}(1+\varepsilon)v_1$

donc :  $\widehat{Y} = -\frac{M\rho^2}{a^2 + \rho^2 + abf}(1+\varepsilon)v_1$

$$\widehat{X} = \frac{M\rho^2 f}{a^2 + \rho^2 + abf}(1+\varepsilon)v_1$$

$$\frac{M\rho^2}{a+bf}f(\omega_2 - \omega_1) = M[u_2 - u_1 - b(\omega_2 - \omega_1)]$$

$$u_2 - u_1 = b + \frac{f\rho^2}{a+bf}(\omega_2 - \omega_1)$$

$$u_2 = u_1 + \frac{ab + b^2 f + \rho^2 f}{a^2 + \rho^2 + abf}(1+\varepsilon)v_1$$

On a alors :

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{ab + b^2 f + \rho^2 f}{a^2 + \rho^2 + abf}(1+\varepsilon)v_1 - b \frac{a+bf}{a^2 + \rho^2 + abf}(1+\varepsilon)v_1$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\rho^2}{a^2 + \rho^2 + abf}f(1+\varepsilon)v_1$$

De même :

$$\beta_2 - \beta_1 = -(1+\varepsilon)v_1 + a \frac{a+bf}{a^2 + \rho^2 + abf}(1+\varepsilon)v_1$$

$$\beta_2 - \beta_1 = \frac{-\rho^2}{a^2 + \rho^2 + abf}(1+\varepsilon)v_1$$

En résumé, le mouvement en fin de choc est défini par :

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\rho^2}{a^2 + \rho^2 + abf}f(1+\varepsilon)v_1$$

$$\beta_2 = \beta_1 - \frac{\rho^2}{a^2 + \rho^2 + abf}(1+\varepsilon)v_1$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{a+bf}{a^2 + \rho^2 + abf}(1+\varepsilon)v_1$$

La percussion de liaison est entièrement déterminée par :

$$\widehat{X} = \frac{M\rho^2}{a^2 + \rho^2 + abf}f(1+\varepsilon)v_1$$

$$\widehat{Y} = -\frac{M\rho^2}{a^2 + \rho^2 + abf}(1+\varepsilon)v_1$$

● 2<sup>e</sup> hypothèse :  $u_1 < -(1+\varepsilon)\frac{f_1 + f_2}{f_2(f_1 + f_2)}v_1$

La vitesse de glissement s'annule pour  $t = t^* \in ]t_1, t_2[$  et reste nulle pendant un certain intervalle de temps (figure 12).

On a  $\frac{du}{dt} = 0$ .

Comme  $\frac{du}{dt} = \frac{\rho^2 + b^2}{M\rho^2}(X - f_2 Y)$ , relation (10),

$$X - f_2 Y = 0 \quad Y > 0$$

Or, dans la phase précédente, nous avons :

$$X = -f Y \quad Y > 0$$

La composante tangentielle devient subitement positive :  $X = f_2 Y$ . L'action de contact est donc discontinue pour  $t = t^*$ . Le non-glissement exige d'autre part :  $|X| < f Y$ .

Le roulement sans glissement se poursuit donc si :

$$f_2 Y < f Y \text{ donc si } f_2 < f$$

soit :  $\frac{ab}{\rho^2 + b^2} < f$

Les conditions de déroulement du choc étant connues, nous pouvons maintenant déterminer  $\alpha_2, \beta_2, \omega_2, \widehat{X}, \widehat{Y}$ .

● 3<sup>e</sup> hypothèse

La vitesse de glissement qui s'était annulée pour  $t = t_1$  devient négative (figure 13).

La vitesse de glissement étant forcément négative, on a :

$$|X| = f|Y|$$

$$X = +f Y$$

On avait précédemment  $X = -f Y$ .

Il y a donc ici aussi discontinuité :

$$\frac{du}{dt} = +\frac{\rho^2 + b^2}{M\rho^2}(f - f_2)Y$$

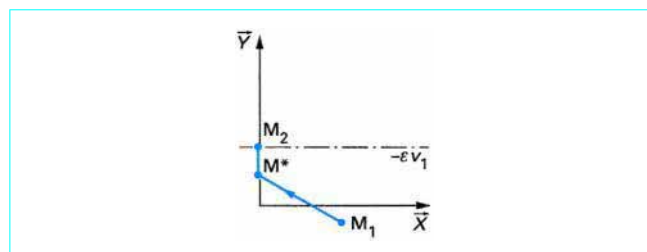


Figure 12 - Vitesse de glissement nulle en fin de choc

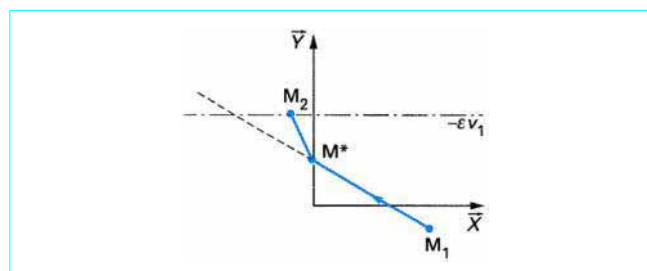


Figure 13 - Vitesse de glissement négative en fin de choc



■ La vitesse de glissement initiale est négative :  $u_1 < 0$

La composante tangentielle  $X$  est donc positive au début du choc :

$$X = f Y$$

Les équations :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\rho^2 + b^2}{M\rho^2} (X - f_2 Y) ; \frac{dv}{dt} = \frac{ab}{M\rho^2} (f_1 Y - X)$$

deviennent alors :

$$\frac{du}{dv} = \frac{\rho^2 + b^2}{M\rho^2} (f - f_2) Y ; \frac{dv}{du} = \frac{ab}{M\rho^2} (f_1 - f) Y \quad Y > 0$$

La trajectoire du point M est donc définie par :

$$\frac{dv}{du} = \frac{ab}{\rho^2 + b^2} \frac{f_1 - f}{f - f_2} ; \frac{dv}{du} = f_2 \frac{f_1 - f}{f - f_2} ; f_2 < f_1$$

$$v - v_1 = f_2 \frac{f_1 - f}{f - f_2} (u - u_1) ; u_1 < 0$$

équation valable au départ.

C'est la position de  $f$  par rapport à  $f_1$  et  $f_2$  qui va permettre de conduire la discussion.

On peut, à partir de l'hodographe du choc (figure 14abc) faire le même raisonnement que précédemment.

■ La vitesse de glissement initiale est nulle :  $u_1 = 0$

Trois cas peuvent se produire après l'instant initial :

- $u$  reste nul ;
- $u$  devient positif ;
- $u$  devient négatif.

Par une étude analogue aux précédentes, on peut montrer que deux cas seulement peuvent se produire.

$u$  reste nul ou devient négatif jusqu'en fin de choc (figure 15).

### 3.2 Méthode générale

La méthode se généralise au cas de deux solides quelconques, tous deux en mouvement (figure 16).

Les deux solides donnant lieu à l'impact sont (S) et (S').

$[O_g ; \vec{X}_g, \vec{Y}_g, \vec{Z}_g]$  est un repère galiléen,  $[I ; \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0]$  est un

repère d'origine I, point d'impact et  $\vec{Z}_0$  est porté par la normale commune.

On utilisera, comme repère de projection, le repère :

$$[I ; \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0]$$

■ Solide (S) : centre d'inertie G

$$\vec{IG} = [a, b, c]_{R_0}$$

masse  $M$

$$\text{tenseur } I_G = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_0}$$

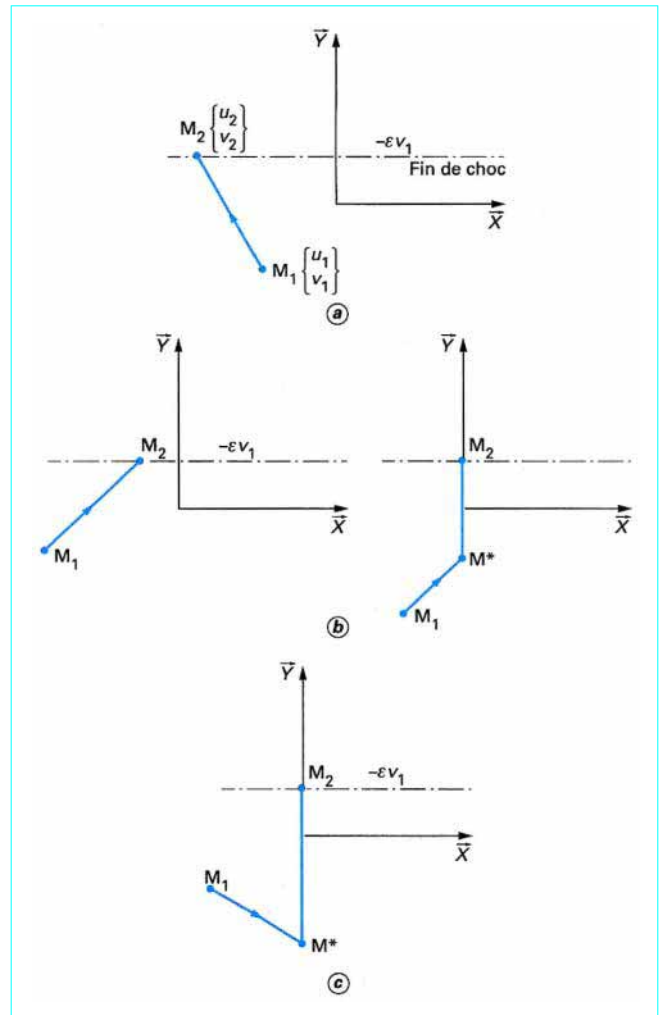


Figure 14 – Hodographe pour  $u_1 < 0$

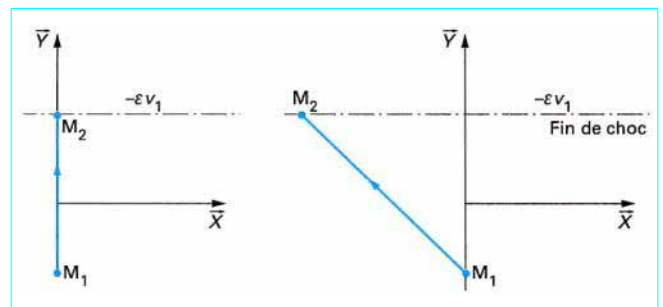


Figure 15 – Hodographe pour  $u_1 = 0$



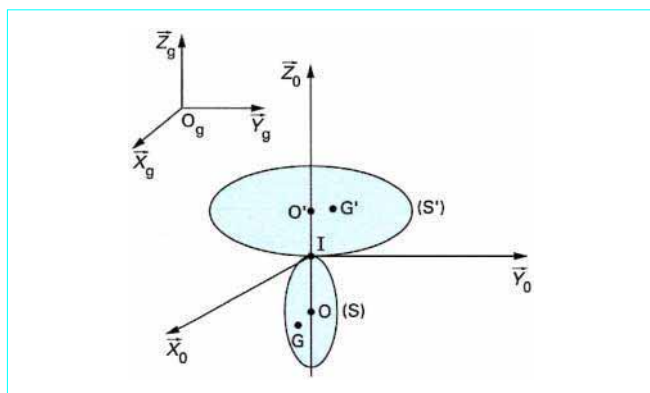


Figure 16 – Choc de deux solides quelconques

### ■ Solide (S') : centre d'inertie G'

$$\overline{IG'} = [a', b', c']_{R_0}$$

masse  $M'$

$$\text{tenseur } \overline{I_{G'}} = \begin{bmatrix} A' & -F' & -E' \\ -F' & B' & -D' \\ -E' & -D' & C' \end{bmatrix}_{R_0}$$

Nous n'avons pas besoin de la position des solides (S) et (S'). Leur état des vitesses suffit :

$$\text{— solide (S) : } \vec{v}^g(G) = [\alpha, \beta, \gamma]_{R_0} \quad \overline{\Omega_S^g} = [p, q, r]_{R_0}$$

$$\text{— solide (S') : } \vec{v}^g(G') = [\alpha', \beta', \gamma']_{R_0} \quad \overline{\Omega_{S'}^g} = [p', q', r']_{R_0}$$

Les percussions mises en jeu au contact sont  $\widehat{F_{SS'}}$  et  $\widehat{F_{S'S}}$ .

$$\widehat{F_{SS'}} = [\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z}]_{R_0}; \quad \widehat{F_{S'S}} = [-\widehat{X}, -\widehat{Y}, -\widehat{Z}]_{R_0}$$

On suit exactement le processus utilisé pour le cas des plaques planes.

### 3.2.1 Théorèmes généraux du choc appliqués à (S) et (S')

#### ■ Théorèmes généraux appliqués à (S)

$$\bullet \widehat{F_{S'S}} = M \left( \left[ \vec{v}^0(G) \right]_2 - \left[ \vec{v}^0(G) \right]_1 \right)$$

$$-\widehat{X} = M(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (16)$$

$$-\widehat{Y} = M(\beta_2 - \beta_1) \quad (17)$$

$$-\widehat{Z} = M(\gamma_2 - \gamma_1) \quad (18)$$

$$\bullet \overline{GI} \wedge \widehat{F_{S'S}} = \left[ \mu^0(G) \right]_2 - \left[ \mu^0(G) \right]_1$$

$$\mu^0(G) = \overline{I_G} \cdot \overline{\Omega_S^0}$$

$$= \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\overline{GI} \wedge \widehat{F_{S'S}} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -\widehat{X} \\ -\widehat{Y} \\ -\widehat{Z} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b\widehat{Z} - c\widehat{Y} \\ c\widehat{X} - a\widehat{Z} \\ a\widehat{Y} - b\widehat{X} \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\begin{cases} b\widehat{Z} - c\widehat{Y} = A(p_2 - p_1) - F(q_2 - q_1) - E(r_2 - r_1) & (19) \\ c\widehat{X} - a\widehat{Z} = -F(p_2 - p_1) + B(q_2 - q_1) - D(r_2 - r_1) & (20) \\ a\widehat{Y} - b\widehat{X} = -E(p_2 - p_1) - D(q_2 - q_1) - C(r_2 - r_1) & (21) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b\widehat{Z} - c\widehat{Y} = A(p_2 - p_1) - F(q_2 - q_1) - E(r_2 - r_1) & (19) \\ c\widehat{X} - a\widehat{Z} = -F(p_2 - p_1) + B(q_2 - q_1) - D(r_2 - r_1) & (20) \\ a\widehat{Y} - b\widehat{X} = -E(p_2 - p_1) - D(q_2 - q_1) - C(r_2 - r_1) & (21) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b\widehat{Z} - c\widehat{Y} = A(p_2 - p_1) - F(q_2 - q_1) - E(r_2 - r_1) & (19) \\ c\widehat{X} - a\widehat{Z} = -F(p_2 - p_1) + B(q_2 - q_1) - D(r_2 - r_1) & (20) \\ a\widehat{Y} - b\widehat{X} = -E(p_2 - p_1) - D(q_2 - q_1) - C(r_2 - r_1) & (21) \end{cases}$$

#### ■ Théorèmes généraux appliqués à (S')

$$\bullet \widehat{F_{SS'}} = M' \left( \left[ \vec{v}^0(G') \right]_2 - \left[ \vec{v}^0(G') \right]_1 \right)$$

On obtient donc des équations comparables à (16), (17) et (18).

$$\widehat{X} = M'(\alpha'_2 - \alpha'_1) \quad (22)$$

$$\widehat{Y} = M'(\beta'_2 - \beta'_1) \quad (23)$$

$$\widehat{Z} = M'(\gamma'_2 - \gamma'_1) \quad (24)$$

$$\bullet \overline{G'I} \wedge \widehat{F_{SS'}} = \left[ \mu^0(G') \right]_2 - \left[ \mu^0(G') \right]_1$$

Il s'agit du moment cinétique du solide (S'). On obtient des équations comparables à (19), (20) et (21) :

$$\begin{cases} -b\widehat{Z} + c\widehat{Y} = A'(p'_2 - p'_1) - F'(q'_2 - q'_1) - E'(r'_2 - r'_1) & (25) \\ -c\widehat{X} + a\widehat{Z} = -F'(p'_2 - p'_1) + B'(q'_2 - q'_1) - D'(r'_2 - r'_1) & (26) \\ -a\widehat{Y} + b\widehat{X} = -E'(p'_2 - p'_1) - D'(q'_2 - q'_1) + C'(r'_2 - r'_1) & (27) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b\widehat{Z} + c\widehat{Y} = A'(p'_2 - p'_1) - F'(q'_2 - q'_1) - E'(r'_2 - r'_1) & (25) \\ -c\widehat{X} + a\widehat{Z} = -F'(p'_2 - p'_1) + B'(q'_2 - q'_1) - D'(r'_2 - r'_1) & (26) \\ -a\widehat{Y} + b\widehat{X} = -E'(p'_2 - p'_1) - D'(q'_2 - q'_1) + C'(r'_2 - r'_1) & (27) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b\widehat{Z} + c\widehat{Y} = A'(p'_2 - p'_1) - F'(q'_2 - q'_1) - E'(r'_2 - r'_1) & (25) \\ -c\widehat{X} + a\widehat{Z} = -F'(p'_2 - p'_1) + B'(q'_2 - q'_1) - D'(r'_2 - r'_1) & (26) \\ -a\widehat{Y} + b\widehat{X} = -E'(p'_2 - p'_1) - D'(q'_2 - q'_1) + C'(r'_2 - r'_1) & (27) \end{cases}$$

On constate qu'il y a alors :

$$\begin{cases} 12 \text{ équations [de (16) à (27)]} \\ 15 \text{ inconnues : } \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, p_2, q_2, r_2; \alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2, p'_2, q'_2, r'_2; \widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z} \end{cases}$$

### 3.2.2 Lois concernant les actions mécaniques

#### ■ Loi de fin de choc

Elle s'exprime, par exemple, sous la forme de Darboux par :

$$\left( \overline{W_{S'}^S} \right)_2 = -\varepsilon \left( \overline{W_{S'}^S} \right)_1$$

avec 
$$\vec{W}_{S'}^S = \frac{1}{(\vec{OO}')^2} \left[ \vec{v}_{S'}^S(P) \cdot \vec{OO}' \right] \vec{OO}'$$

$$\vec{W}_{S'}^S = \left[ \vec{v}_{S'}^S(P) \cdot \vec{Z}_0 \right] \cdot \vec{Z}_0$$

$$\vec{v}_{S'}^S(P) = \vec{v}_{S'}^0(P) - \vec{v}_S^0(P)$$

$$\vec{v}_{S'}^S(P) \cdot \vec{Z}_0 = \gamma' - \gamma$$

$$\vec{W}_{S'}^S = (\gamma' - \gamma) \vec{Z}_0$$

On a donc :  $\gamma'_2 - \gamma_2 = -\varepsilon(\gamma'_1 - \gamma_1)$

■ **Lois de Coulomb**

Elles dépendent, comme on le sait, de la vitesse de glissement. Il peut y avoir des phases de glissement ou de non-glissement qui correspondent chacune à une forme appropriée des lois de Coulomb.

Posons  $\vec{g}_{S'}^S(I)$  : vitesse de glissement de (S')/(S).

$$\vec{g}_{S'}^S(I) = \vec{n} \wedge \vec{v}_{S'}^S \wedge \vec{n} \quad \text{c'est-à-dire ici} \quad \vec{g}_{S'}^S(I) = \vec{Z}_0 \wedge \vec{v}_{S'}^S \wedge \vec{n}$$

Si  $\vec{g}_{S'}^S(I) \neq 0$  : il y a glissement :

$$\sqrt{\widehat{X}^2 + \widehat{Y}^2} = f|\widehat{Z}|$$

Si  $\vec{g}_{S'}^S(I) = 0$  : il y a roulement sans glissement :

$$\begin{cases} \sqrt{\widehat{X}^2 + \widehat{Y}^2} < f|\widehat{Z}| \\ (\widehat{X}\vec{X}_0 + \widehat{Y}\vec{Y}_0) \cdot \vec{g}_{S'}^S(I) < 0 \Leftrightarrow (\vec{Z}_0 \wedge \widehat{F}_{SS'} \wedge \vec{Z}_0) \cdot \vec{g}_{S'}^S(I) < 0 \end{cases}$$

avec  $\widehat{F}_{SS'} = \widehat{X}\vec{X}_0 + \widehat{Y}\vec{Y}_0 + \widehat{Z}\vec{Z}_0$ .

L'application des lois de Coulomb exige la connaissance à tout instant de la vitesse de glissement. (Il faut donc, pour cela, suivre le mouvement à chaque instant de l'intervalle de choc et non plus globalement).

Pour préciser les circonstances du choc, on procède comme précédemment :

- on écrit les théorèmes généraux pour les forces finies ;
- on calcule la vitesse de glissement en fonction de l'état de mouvement de chaque solide ;
- enfin, on exprime les dérivées des composantes de la vitesse de glissement en fonction des actions de contact.

**3.2.3 Théorèmes généraux de la dynamique des forces finies**

On a immédiatement, en posant  $\vec{F}_{SS'} = [X, Y, Z]_{R_0}$ , les équations suivantes.

Pour le solide (S), on peut écrire :

$$-X = M \frac{d\alpha}{dt} \tag{28}$$

$$-Y = M \frac{d\beta}{dt} \tag{29}$$

$$-Z = M \frac{d\gamma}{dt} \tag{30}$$

$$\begin{cases} bZ - cY = A \frac{dp}{dt} - F \frac{dq}{dt} - E \frac{dr}{dt} \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} cX - aZ = -F \frac{dp}{dt} + B \frac{dq}{dt} - D \frac{dr}{dt} \end{cases} \tag{32}$$

$$\begin{cases} aY - bX = -E \frac{dp}{dt} - D \frac{dq}{dt} + C \frac{dr}{dt} \end{cases} \tag{33}$$

Pour le solide (S'), on peut écrire :

$$X = M' \frac{d\alpha'}{dt} \tag{34}$$

$$Y = M' \frac{d\beta'}{dt} \tag{35}$$

$$Z = M' \frac{d\gamma'}{dt} \tag{36}$$

$$\begin{cases} -bZ + cY = A' \frac{dp'}{dt} - F' \frac{dq'}{dt} - E' \frac{dr'}{dt} \end{cases} \tag{37}$$

$$\begin{cases} -cX + aZ = -F' \frac{dp'}{dt} + B' \frac{dq'}{dt} - D' \frac{dr'}{dt} \end{cases} \tag{38}$$

$$\begin{cases} -aY + bX = -E' \frac{dp'}{dt} - D' \frac{dq'}{dt} + C' \frac{dr'}{dt} \end{cases} \tag{39}$$

**3.2.4 Expression de  $\vec{v}_{S'}^S(I)$**

$$\vec{v}_{S'}^S(I) = \vec{v}_{S'}^0(I) - \vec{v}_S^0(I)$$

$$\vec{v}_{S'}^0(I) = \vec{v}_{S'}^0(G') + \vec{\Omega}_{S'}^0 \wedge \vec{G}'\vec{I}$$

$$\vec{\Omega}_{S'}^0 \wedge \vec{G}'\vec{I} = \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix}_{R_0} \wedge \begin{bmatrix} -a' \\ -b' \\ -c' \end{bmatrix}_{R_0} = \begin{bmatrix} -q'c' + r'b' \\ -a'r' + c'p' \\ -b'p' + a'q' \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{v}_{S'}^0(I) = \begin{bmatrix} \alpha' + b'r' - c'q' \\ \beta' + c'p' - a'r' \\ \gamma' + a'q' - b'p' \end{bmatrix}_{R_0}$$

De même :

$$\vec{v}_S^0(I) = \begin{bmatrix} \alpha + br - cq \\ \beta + cp - ar \\ \gamma + aq - bp \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{v}_{S'}^S(I) = \begin{bmatrix} \alpha' + b'r' - c'q' - \alpha - br + cq \\ \beta' + c'p' - a'r' - \beta - cp + ar \\ \gamma' + a'q' - b'p' - \gamma - aq + bp \end{bmatrix}_{R_0}$$

### 3.2.5 Relation entre la vitesse de glissement et les composantes de $\vec{F}_{SS'}$

Posons  $\vec{v}_{S'}^S(I) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{R_0}$  et dérivons  $u, v, w$  par rapport au

temps :

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\alpha'}{dt} + b' \frac{dr'}{dt} - c' \frac{dq'}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} - b \frac{dr}{dt} + c \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\beta'}{dt} + c' \frac{dp'}{dt} - a' \frac{dr'}{dt} - \frac{d\beta}{dt} - c \frac{dp}{dt} + a \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d\gamma'}{dt} + a' \frac{dq'}{dt} - b' \frac{dp'}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} - a \frac{dq}{dt} + b \frac{dp}{dt}$$

Les équations (28), (29), (30), (31) et (32) permettent d'exprimer :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} ; \frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\alpha'}{dt}, \frac{d\beta'}{dt}, \frac{d\gamma'}{dt} ; \frac{dp'}{dt}, \frac{dq'}{dt}, \frac{dr'}{dt} \end{array} \right.$$

en fonction de  $X, Y, Z$  (système de 12 équations à 12 inconnues). On peut donc écrire :

$$\frac{du}{dt} = a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z$$

$$\frac{dv}{dt} = a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z$$

$$\frac{dw}{dt} = a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z$$

Les composantes  $X, Y, Z$  ne sont pas indépendantes, mais assujetties aux lois de Coulomb.

■ **Vitesse de glissement**  $g_{S'}^S(I) \neq 0$

$$\vec{g}_{S'}^S(I) = u\vec{X}_0 + v\vec{Y}_0$$

$\frac{X}{u} = \frac{Y}{v} = K$   $K < 0$  composante tangentielle de  $\vec{F}_{SS'}$  opposée à  $\vec{v}_{S'}^S(I)$ .

D'autre part :

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = f|Z| \quad \text{mais } Z > 0 \text{ (choc)}$$

$$\sqrt{K^2(u^2 + v^2)} = fZ \quad \text{or } K < 0$$

$$-K\sqrt{u^2 + v^2} = fZ$$

$$K = -\frac{fZ}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

On a donc finalement :

$$\frac{X}{u} = \frac{Y}{v} = \frac{-fZ}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

■ **Vitesse de glissement**  $g_{S'}^S(I) = 0 ; u = 0 ; v = 0$

On a :  $\frac{du}{dt} = 0 ; \frac{dv}{dt} = 0$

ce qui donne :

$$\begin{cases} a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z = 0 \\ a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z = 0 \\ \sqrt{X^2 + Y^2} < fZ \quad Z > 0 \end{cases}$$

### 3.2.6 Discussion du problème de choc

Posons  $\vec{IM} = [u, v, w]_{R_0}$ . Le point M est donc l'extrémité du vecteur vitesse  $\vec{v}_{S'}^S(I)$ . Pendant le choc, ce point décrit dans  $[O; \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0]$  une trajectoire que nous avons appelée hodo-graphe du choc. La connaissance de cette courbe nous renseigne parfaitement sur l'état du vecteur  $\vec{v}_{S'}^S(I)$ . Mais, alors que dans le cas des plaques planes nous avons une droite, dans le cas général, il s'agit d'une courbe gauche.

S'il y a glissement, nous avons :

$$\frac{X}{u} = \frac{Y}{v} = -\frac{fZ}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

S'il y a roulement sans glissement, l'équation de la trajectoire est :

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases} ; \text{ c'est l'axe } (O; \vec{Z}_0)$$

#### ■ Étude du cas où il y a glissement

Pour trouver la trajectoire, on a les équations :

$$\frac{X}{u} = \frac{Y}{v} = -\frac{fZ}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$\frac{du}{dt} = a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z$$

$$\frac{dv}{dt} = a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z$$

$$\frac{dw}{dt} = a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z$$

On peut facilement éliminer  $X, Y, Z$  de la façon suivante :

$$\frac{du}{dt} = -a_{11}fZ \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} - a_{12}fZ \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} + a_{13}Z$$

$$\frac{du}{dt} = Zf \left( -a_{11}u - a_{12}v + \frac{a_{13}}{f} \sqrt{u^2 + v^2} \right) \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$\frac{dv}{dt} = Zf \left( -a_{21}u - a_{22}v + \frac{a_{23}}{f} \sqrt{u^2 + v^2} \right) \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$\frac{dw}{dt} = Zf \left( -a_{31}u - a_{32}v + \frac{a_{33}}{f} \sqrt{u^2 + v^2} \right) \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{du}{a_{11}u + a_{12}v - \frac{a_{13}}{f}\sqrt{u^2 + v^2}} &= \frac{dv}{a_{21}u + a_{22}v - \frac{a_{23}}{f}\sqrt{u^2 + v^2}} \\ &= \frac{dw}{a_{31}u + a_{32}v - \frac{a_{33}}{f}\sqrt{u^2 + v^2}} \end{aligned}$$

C'est l'équation différentielle de l'hodographe du choc ; le point figuratif M a pour coordonnées  $u, v, w$ .

L'intégration ne présente pas de difficulté. Elle est très souvent facilitée par des simplifications propres à chaque problème.

S'il n'y a pas de simplification *a priori*, on pourra procéder de la manière suivante en passant en coordonnées polaires (figure 17).

Posons :

$$\left( \vec{X}_0, \vec{g}_{S'}^S \right) = \theta ; \vec{g}_{S'}^S = g \vec{X}$$

On a donc :  $u = g \cos \theta$

$$v = g \sin \theta$$

L'équation différentielle de l'hodographe s'écrit donc :

$$\frac{\cos \theta dg - g \sin \theta d\theta}{\left( a_{11} \cos \theta + a_{12} \sin \theta - \frac{a_{13}}{f} \right) g} = \frac{\sin \theta dg + g \cos \theta d\theta}{\left( a_{21} \cos \theta + a_{22} \sin \theta - \frac{a_{23}}{f} \right) g} = \frac{dw}{\left( a_{31} \cos \theta + a_{32} \sin \theta - \frac{a_{33}}{f} \right) g}$$

C'est une relation de la forme :

$$\frac{\cos \theta dg - g \sin \theta d\theta}{P} = \frac{\sin \theta dg + g \cos \theta d\theta}{Q} = \frac{dw}{R}$$

avec  $P = \left( a_{11} \cos \theta + a_{12} \sin \theta - \frac{a_{13}}{f} \right) g,$

$$Q = \left( a_{21} \cos \theta + a_{22} \sin \theta - \frac{a_{23}}{f} \right) g,$$

$$R = \left( a_{31} \cos \theta + a_{32} \sin \theta - \frac{a_{33}}{f} \right) g.$$

Les deux premiers rapports donnent :

$$Q \cos \theta dg - gQ \sin \theta d\theta - P \sin \theta dg - Pg \cos \theta d\theta = 0$$

ou  $dg(Q \cos \theta - P \sin \theta) - g(Q \sin \theta + P \cos \theta) d\theta = 0$

$$\frac{dg}{g} = \frac{P \cos \theta + Q \sin \theta}{Q \cos \theta - P \sin \theta} d\theta$$

C'est l'équation différentielle, en coordonnées polaires, de la trajectoire de m projection de M sur  $(I; \vec{X}_0, \vec{V}_0)$ .

Cette relation n'est valable, bien sûr, que si l'on est, tout au long du choc, dans les mêmes conditions d'application pour les lois de Coulomb, c'est-à-dire **si le mouvement a toujours lieu avec glissement**.

Si, au départ, il y a roulement sans glissement ou si celui-ci survient au cours du mouvement, alors il faut reprendre l'étude.

■ Étude du cas où il y a roulement sans glissement

$$\left. \begin{matrix} u = 0 \\ v = 0 \end{matrix} \right\} \text{ soit au début du choc, soit en cours de choc}$$

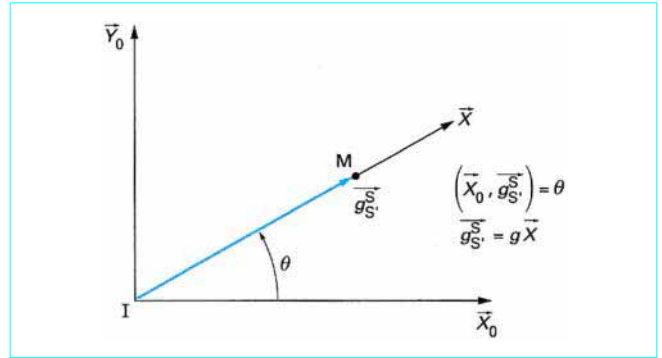


Figure 17 - Vitesse de glissement en coordonnées polaires

On a alors :

$$\frac{du}{dt} = 0 ; \frac{dv}{dt} = 0 \text{ pendant toute la phase de roulement sans glissement}$$

D'où : 
$$\begin{cases} a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z = 0 \\ a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z = 0 \end{cases}$$

On peut exprimer X et Y en fonction de Z :

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} Z ; Y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} Z$$

$$X = \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} Z ; Y = \frac{a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} Z$$

mais, pour qu'il y ait roulement sans glissement, nous devons avoir :

$$\sqrt{X^2 + Y^2} \leq fZ \text{ ou encore } X^2 + Y^2 \leq f^2 Z^2$$

soit : 
$$\frac{(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})^2 + (a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23})^2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2} \leq f^2$$

ce qui donne la valeur du coefficient de frottement nécessaire pour qu'il y ait roulement sans glissement. Dans ces conditions, la partie correspondante de l'hodographe est l'axe des  $\vec{Z}$ .

Si au contraire :

$$f^2 < \frac{(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})^2 + (a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23})^2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2}$$

il y a glissement et on recommence une phase régie par l'hodographe déjà étudié.

Renseigné par l'hodographe du choc sur la nature du contact, les théorèmes généraux du choc permettent alors de calculer l'état des vitesses après choc et la percussion de contact.